Université de Bordeaux I 2006 - 2007
MAP 401, série INF 3 -

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 5

Cette fiche porte sur les:
- *Propriétés des sous-groupes.*
- *Anneaux et Idéaux*

I- Exercices théoriques sur les sous-groupes.

Exercice 1 : la réunion de 2 sous groupes n'est pas, en général, un sous-groupe.
Soient G un groupe et H_1, H_2 deux sous groupes de G.
Montrer que si $H_1 \cup H_2$ est un sous groupe de G alors $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

Exercice 2. Soient G un groupe et H une partie non vide et **finie** de G. Montrer que si pour tout $(x, y) \in H^2$ on a $xy \in H$ alors H est un sous groupe de G.
Indication : pour $x \in H$ considérer l'application f_x de H dans H définie par $f_x(y) = xy$.

Exercice 3. Soient G un groupe et H un sous groupe de G. On note $H^2 = \{xy \mid x, y \in H\}$, $H^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in H\}$ et $HH^{-1} = \{xy^{-1} \mid x, y \in H\}$.
a. Montrer que $H^2 = H$, $H^{-1} = H$ et $HH^{-1} = H$.
b. Soient H, K des sous-groupe de G. On note $HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$ et $KH = \{xy \mid x \in K, y \in H\}$. Montrer que HK est un sous groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 4. Soient G_1 un groupe cyclique d'ordre p et G_2 un groupe cyclique d'ordre q.
a. Montrer que si p et q sont premiers entre eux alors $G_1 \times G_2$ est cyclique.
Indication : on pourra par exemple montrer que si r, s sont des entiers le système

$$\begin{cases} x \equiv r\ [p] \\ x \equiv s\ [q] \end{cases} \textit{ admet des solutions.}$$

b. Le résultat reste t-il vrai si p et q ne sont pas premiers entre eux ?

Exercice 5. On considère les permutations de S_3 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
a. Décrire les éléments du groupe symétrique S_3.
b. Déterminer tous les sous groupes de S_3.
c. Soit H le sous groupe engendré par τ. Déterminer les classes à droite et à gauche modulo H.

Exercice 6. Soit n un entier.
1. Montrer que S_n est engendré par les $n - 1$ transpositions $(12), (13), \ldots, (1n)$.
2. Montrer que ce groupe est aussi engendré par les transpositions $(12), (23), \ldots,$ $(n - 1, n)$.

Exercice 7. Soit G un groupe. Pour tout $a \in G$, on désigne par $C(a)$ l'ensemble des éléments qui commutent avec x ($\{x \in G \mid ax = xa$ pour tout $x \in G\}$).
1. Montrer que, pour tout a, $C(a)$ est un sous-groupe de G.
2. Que vaut $C(a)$ si G est commutatif ?
3. Déterminer $C(x)$ lorsque :
   a. $G = S_3$, $x = (1, 2)$.
   b. Plus généralement, $G = S_n$, $x = (a, b)$.

Exercice 8. Un groupe dont tous les sous-groupes propres sont cycliques est-il nécessairement cyclique? Ou abélien?

II. Anneau.

Exercice 1.

a. Montrer que $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni des lois d'addition et de multiplication composante par composante est un anneau commutatif unitaire.

b. Soit $B = \mathbb{Z} \times \{0\}$. Vérifier que B est un sous-anneau unitaire de A mais que les éléments neutres pour A et B sont différents.

c. Soit $C = 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$. Vérifier que C est un sous-anneau de A mais qu'il n'est pas unitaire.

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des applications (resp. applications continues) de I dans $\mathbb{R}$.

a.Montrer que $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ muni de l'addition et du produit des fonctions usuelles est un anneau unitaire.

b. Montrer que $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Exercice 3.

a. Soit $(A, +, .)$ un anneau et $a \in A$ Montrer que si a admet un inverse à gauche x, c'est-à-dire tel que $x.a = e$, et un inverse à droite x', c'est-à-dire tel que $a.x' = e$ alors $x = x'$.

b. On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A, c'est à dire ceux qui admettent un inverse à droite et à gauche. On suppose A unitaire. Montrer que $(A^\times, .)$ est un groupe. (Ce groupe s'appelle le groupe des unités de A.) Déterminer $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 4. Soit $(A, +, .)$ un anneau fini et $x \in A$ tel que pour tout $y \neq 0$ on a $x.y \neq 0$.

a. Montrer que x admet un inverse à droite. (On pourra introduire l'application f de A dans A définie par $f(y) = x.y$.)

b. Montrer que x admet un inverse à gauche.

c. Déterminer les diviseurs de 0 de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, c'est à dire les éléments $x \neq 0$ tel qu'il existe $y \neq 0$ vérifiant $xy = 0$. En déduire les éléments inversibles.

Exercice 5. Soit $(A, +, .)$ un anneau et a, b deux élément de A qui commutent.

a. Soit $n \geq 1$. Etablir la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k.b^{n-k}$$

b. En déduire que si a et b sont nilpotents, c'est à dire si il existe des entiers p et q tels que $a^p = b^q = 0$, alors $a + b$ est nilpotent.

c. Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 6.

a. Montrer que $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & q \end{pmatrix} ; (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ est un idéal à gauche de $M_2(\mathbb{Z})$ mais n'est pas un idéal à droite.

b. Montrer que $J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} ; (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ est un idéal à droite de $M_2(\mathbb{Z})$ mais n'est pas un idéal à gauche.

c. Montrer que $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; (a, b, c, d) \in (2\mathbb{Z})^4 \right\}$ est un idéal bilatère de $M_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 7. Soit A un anneau.

a. Soient I, J des idéaux de A. Montrer que $I + J$et $I \cap J$ sont des idéaux de A.

b. Si $A = \mathbb{Z}$, $I,\ J$ sont deux idéaux engendré par a, b. Déterminer $I + J$et $I \cap J$.