Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 6

Cette fiche porte sur les:
- *Anneaux, Idéaux, Corps et les morphismes des anneaux et des corps.*

Exercice 1. *Soit* $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

a. *Montrer que* $\mathbb{Z}[i]$ *est un anneau commutatif pour les lois usuelles de* $\mathbb{C}$.
b. *Déterminer les inversibles de* $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 2. *Sur l'ensemble* $\mathbb{R}^2$, *on définit la loi* $*$ *par*

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1).$$

1. a. *Montrer que* $(\mathbb{R}^2, +, *)$ *est un anneau commutatif unitaire noté* A.
   b. *Chercher les diviseurs de* 0 *de l'anneau* A.
2. *On considère l'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0)). \end{array}$$

   a. *Montrer que* f *est un homomorphisme d'anneaux.*
   b. f *est-il surjectif?*
   c. *Déterminer le noyau de* f.

Exercice 3. *Soit* $(G,\ +)$ *un groupe commutatif. On note* $End(G)$ *l'ensemble des endomorphismes de* G *sur lequel on définit la loi* $+$ *par* $f + g = \left\{ \begin{array}{l} G \longrightarrow G, \\ x \longmapsto f(x) + g(x). \end{array} \right.$ *Montrer que* $(End(G), +, \circ)$ *est un anneau.*

Exercice 4.

a. *Soit* $D = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f'(0) = 0\}$. *Montrer que* D *est un sous-anneau unitaire de l'anneau des polynômes à coefficients réels* $\mathbb{R}[X]$ *mais que ce n'est pas un idéal de* $\mathbb{R}[X]$.
b. *Soit* $E = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. *Montrer que* E *n'est pas un sous-anneau unitaire de l'anneau* $\mathbb{R}[X]$ *mais que c'est un idéal de* $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. *Soit* $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{Z}[X];\ P(0) \in 2\mathbb{Z}\}$.

1. a. *Montrer que* $\mathcal{J}$ *est un idéal de* $\mathbb{Z}[X]$.
   b. *Montrer que* $\mathcal{J}$ *est engendré par les polynômes* 2 *et* X.
2. *En remarquant que* $2 \in \mathcal{J}$, *montrer que l'hypoyhèse "*$\mathcal{J}$ *est un idéal principal de* $\mathbb{Z}[X]$ *(i.e.* $\mathcal{J} = \langle a \rangle$*)" est absurde.*

Exercice 6. *(Exemple sur les idéaux dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*).*
On considère à présent aussi la loi-quotient $+$ *usuelle sur* $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. *On admet que* $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *est un anneau.*

a. *Montrer que* $I = \{\bar{0},\ \bar{3},\ \bar{6}\}$ *est un idéal de* $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

b. *Peut-on affirmer que les éléments non inversibles forment un idéal dans tout anneau fini? (Indication: regarder les éléments non inversibles dans* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *(voir Feuille 5-EX: II-3))*

Exercice 7. *Soient les ensembles:*

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Étudier si, muni des lois usuelles, L, M sont des anneaux, des corps.

Exercice 8. *(Homomorphisme de corps.)*

Soit J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et K le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par*

$$K = \{aI + bJ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

(où I désigne la matrice identité).

a. *Montrer que J vérifier: $I + J + J^2 = 0$.*

b. *Montrer que l'addition et la multiplication usuelles munissent K d'une structure de corps commutatif.*

c. *Soit $j = e^{2i\pi/3} \in \mathbb{C}$. On pose $L = \{a + bj,\ (a,b) \in \mathbb{R}\}$. Montrer que l'application f*

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & L \\ aI + bJ & \longmapsto & f(aI + bJ) = a + bj \end{array}$$

est un isomorphisme de corps.