Université de Bordeaux I 2006 - 2007
MAP 401, série INF 3 -

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 3

Cette fiche porte sur les structures algébriques élémentaires. Vous devez savoir:
- *Lois de composition interne.*
- *Montrer qu'une ensemble est un Groupe.*

Exercice 1:(Exemples de lois)

a. Sur E={ fonctions continues: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$}, l'addition est elle une loi? et le produit?

b. Même questions avec l'ensemble F ={ fonctions continues: $\mathbb{R} \longrightarrow$[0;1]}.

c. L'application suivante $T : (x, y) \longrightarrow xTy = x - y$ est elle une loi sur $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}$? Est elle associative, commutative? admet-elle un élément neutre?

Exercice 2:(Savoir montrer qu'une ensemble est un Groupe)

a. Les ensembles suivants sonts-ils groupe:

1. (1+i)$\mathbb{R}$={$z \in \mathbb{C}$, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tq $z = (1 + i)x$}, pour l'addition dans $\mathbb{C}$.
2. (1+i)$\mathbb{R}$, pour la multiplication dans $\mathbb{C}$.

b. Soit n un entier. Montrer que $U_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } z^n = 1\}$ est un groupe, pour la multiplication. Et pour l'addition?

c. Soit $G = R^{+*} \times \mathbb{R}$. Soit la loi $\otimes$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par:

$$(x, y) \otimes (a, b) = (xa, xb + y).$$

Montrer que G, muni de cette loi, est un groupe.

Exercice 3:

a. Vérifier que la table suivante définit un groupe. Préciser son élément neutre, et le symétrique de chaque élément.

$\times$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

b. Vérifier que les tables suivantes ne définissent pas des groupes :

$\times$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	b	c
c	c	b	a	b
d	d	c	b	a

;

$\times$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	a	e	c	d
c	c	d	a	e	b
d	d	e	b	a	c
e	e	c	d	b	a

Exercice 4: a. Vérifier que $U = \{1, -1, i, -i\}$ muni de la multiplication est un groupe abélien et donner sa table. Montrer que $(U, +)$ n'est pas un groupe.

b. Donner la table du groupe $(U_3 = \{z \in \mathbb{C} : z^3 = 1\}, \times)$.

Exercice 5: a. Donner la table du groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

b. Montrer que la multiplication dans $\mathbb{Z}$ permet de définir une multiplication dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On note . la loi de composition interne que l'on définie ainsi sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Cette loi est-elle associative ? $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, .)$ admet-il un élément neutre ? $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, .)$ est-il un groupe ?
c. Soit $U_4 = \{\bar{1}, \bar{3}\} \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Montrer que $(U_4, .)$ est un groupe et donner sa table.
Exercice 6: Soit $\star$ la loi de composition interne de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(a, b) \star (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

et $E = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe commutatif. Comparer ce groupe à $(\mathbb{C}^*, \times)$).
Exercice 7:
Soit $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, et a un élément non nul de $\mathbb{K}$. Pour x et y dans $\mathbb{K}$, on pose :

$$x * y := x + y - axy.$$

a. Montrer que la loi $*$ est associative.
b. Montrer que cette loi admet un élément neutre. Quels sont les éléments inversibles pour $*$?
c. L'ensemble $\mathbb{K}\backslash\{\frac{1}{a}\}$ muni de $*$ est-il un groupe ?
Exercice 8:
Soit $\mathbb{K}$ comme dans l'exercice précédent, et $\mathbb{E}$ l'ensemble $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$ sur lequel on définit la loi :

$$(a, b, c) * (\alpha, \beta, \gamma) = (a\alpha, b\beta, a\gamma + c\beta).$$

Montrer que cette loi munit $\mathbb{E}$ d'une structure de groupe. Est-il commutatif ?
Exercice 9:
Vérifier que $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$ muni de la multiplication est un groupe abélien.
Exercice 10:
Soit G un groupe dans lequel tout élément est d'ordre deux. Montrer que G est commutatif.
Exercice 11:
Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, et $\circ$ l'application :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (A, B) & \mapsto & (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \end{array} \right.$$

Montrer que $\circ$ fait de $\mathcal{P}(E)$ un groupe. Que dire de l'ordre des éléments ? En déduire que le groupe est commutatif.
Exercice 12:
Montrer que si les éléments a et b d'un groupe G vérifient $a^5 = e$ et $a^3.b = b.a^3$ alors $a^6.b = b.a^6$. En déduire que $a.b = b.a$.
Exercice 13:
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\circ$. On rappelle qu'un élément a de E est dit *régulier* (à gauche) pour $\circ$ si l'application de E dans E qui à x associe $a \circ x$ est injective.

Montrer que si l'on suppose $\circ$ associative, E fini, et que tous ses éléments sont réguliers, alors $(E, \circ)$ est un groupe.