

PNG 302- Mathématiques pour les sciences de la matière 3.

Feuille de TD 0. Les nombres complexes.

Exercice 1. Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous forme algébrique : $z + z'$, $z - z'$, $2z - 3z'$, zz' et z^2 .

Exercice 2. Placer dans le plan complexe les points d'affixes :

$$\begin{aligned} z_1 = 2 + 3i & \quad z_2 = 3 + i & \quad z_3 = -1 + 2i & \quad z_4 = 2 - i & \quad z_5 = i \\ z_6 = -i & \quad z_7 = 1 & \quad z_8 = -i - 3 & \quad z_9 = 2z_1 - 3z_2 & \quad z_{10} = \frac{1}{2}(z_1 + z_3) \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit M le point du plan complexe d'affixe $z = a + ib$. Placer sur le même plan que M :

1. le point M_1 d'affixe $\bar{z} = a - bi$.
2. le point M_2 d'affixe $-\bar{z} = -a + bi$.
3. le point M_3 d'affixe $-z = -a - bi$.

Exercice 4. 1. Calculer $(3 + 2i)(3 - 2i)$. En déduire la forme algébrique de $\frac{1}{3+2i}$.
Réponse : $\frac{1}{13}(3 - 2i)$.

2. En utilisant la méthode de détermination, terminer la forme algébrique de :

$$a) \frac{1}{1+i} \quad b) \frac{1}{2+7i} \quad c) \frac{1}{3-i}$$

$$\text{Réponse : a) } \frac{1}{2}(1-i) \quad b) \frac{1}{53}(2-7i) \quad c) \frac{1}{10}(3+i).$$

3. Ecrire sous forme algébrique :

$$a) \frac{4}{\sqrt{3}-i} \quad b) \frac{2-i}{5+3i} \quad c) \frac{i}{1-3i} \quad d) \frac{2+i}{i}$$

$$\text{Réponse : a) } \sqrt{3} + i \quad b) \frac{1}{34}(7-11i) \quad c) \frac{1}{10}(-3+i) \quad d) 1-2i.$$

Exercice 5. Placer dans le plan complexe les points d'affixes :

$$\begin{aligned} z_1 = 2e^{2i\frac{\pi}{3}} & \quad z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}} & \quad z_3 = 4e^{-i\pi} \\ z_4 = -2e^{i\frac{\pi}{2}} & \quad z_5 = 5e^{i\frac{602\pi}{3}} \end{aligned}$$

Exercice 6. Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 = 3 + 4i & \quad z_2 = 1 - i & \quad z_3 = 5 - \frac{i}{2} & \quad z_4 = 3 \\ z_5 = 1 + i & \quad z_6 = 1 & \quad z_7 = -5 & \quad z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

Exercice 7. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i \quad z_2 = \sqrt{3} + i \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3} \quad z_4 = i$$

Réponses : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $z_2 = 2e^{i\pi/6}$, $z_3 = 2e^{-i\pi/3}$, $z_4 = e^{i\pi/2}$.

Exercice 8. Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 3i$ et $z_B = 5 - i$. Faire un dessin. Calculer les distances OA , OB et AB . En déduire la nature du triangle OAB .

Réponse : $OA = AB = \sqrt{13}$, $OB = \sqrt{26}$. Le triangle OAB est rectangle isocèle en A .

Exercice 9. Déterminer puis dessiner l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que $z\bar{z} = 4$.

Réponse : M décrit le cercle de centre O et de rayon 4.

Exercice 10. Soit A le point du plan complexe d'affixe $z_A = 2 + 3i$. Quel est le lieu des points M d'affixe z tel que $|z - (2 + 3i)| = 5$?

Réponse : M décrit le cercle de centre A et de rayon 5.

Exercice 11. Soit $j := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer $|j|$. Montrer que $j^2 = \bar{j}$. En déduire que $j^3 = 1$.

Exercice 12. Soient $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Réponse : $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $z_2 = 2e^{i\pi/3}$.

2. En déduire les formes trigonométriques de :

$$z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^3, \quad \bar{z}_1, \quad -z_2, \quad \frac{z_1^2}{z_2}$$

Réponse : $z_1 z_2 = 4\sqrt{2}e^{7i\pi/12}$, $z_1/z_2 = \sqrt{2}e^{-i\pi/12}$, $z_1^3 = 16\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$, $\bar{z}_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, $-z_2 = 2e^{i4\pi/3}$, $\frac{z_1^2}{z_2} = 4e^{5i\pi/6}$.

Exercice 13. On considère les points A , B et C du plan complexe d'affixes respectives $a = 1$, $b = 1 + 2i$ et $c = 1 + \sqrt{3} + i$. Calculer $Z := \frac{c-a}{b-a}$. Écrire Z sous forme exponentielle et en déduire la nature du triangle ABC .

Réponse : $Z = e^{-i\pi/3}$ et ABC est équilatéral.

Exercice 14. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$a) z^2 - 2z + 5 = 0 \quad b) z^2 + 3z - 4 = 0 \quad c) 4z^2 - 4z + 1 = 0$$

$$d) 2z^2 - 5z + 7 = 0 \quad e) z + \frac{1}{z} = 1$$

Réponses : a) $1 - 2i$ et $1 + 2i$. b) -4 et 1 . c) $1/2$.

d) $\frac{1}{4}(5 + i\sqrt{31})$ et $\frac{1}{4}(5 - i\sqrt{31})$ e) $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ et $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Exercice 15. Trouver les nombres complexes z tels que $z^5 = -32$. Situer les solutions sur le plan complexe.

Réponse : $2e^{i\pi/5 + 2ik\pi/5}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 4$.

Exercice 16. 1. Écrire $-1 + i$ sous forme trigonométrique.

Réponse : $\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$.

2. Résoudre l'équation : $z^3 = -1 + i$.

Réponse : $2^{1/6}e^{i\pi/4 + 2ik\pi/3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 2$.