

PNG 302- Mathématiques pour les sciences de la matière 3.

Feuille de TD 1. Fonctions de la variable complexe.

Exercice 1. 1. Rappeler la formule de Moivre et calculer $(\cos \theta + i \sin \theta)^5$.

2. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(5\theta) = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta.$$

3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} = 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1.$$

Exercice 2. 1. Rappeler, puis redémontrer, les formules donnant $\cos \theta$ puis $\sin \theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

2. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$$

3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$a) e^z = -2 \quad b) \operatorname{ch} z = -1 \quad c) \operatorname{ch} z + \cos z = 0$$

Solutions : a) $z = \ln 2 + (2k + 1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $z = (2k + 1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $z = (1 + i)(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, ou $z = (1 - i)(2k - 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. Donner les valeurs possibles de :

$$a) \log(-2) \quad b) \log(1 + i) \quad c) \log(\operatorname{ch}(2i)) \quad d) \log((-1 + i)^2)$$

Solutions : a) $\ln 2 + (2k + 1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\frac{1}{2} \ln 2 + (\frac{1}{4} + 2k)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\ln(-\cos 2) + (2k + 1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\ln 2 + (2k - \frac{1}{2})i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5. Dans le plan privé de la demi-droite d'origine O et d'argument $\frac{5\pi}{6}$, on considère la fonction logarithme qui est égale à $2i\pi$ pour $z = 1$. Quelles sont les valeurs de cette fonction pour $z = i$ et $z = -2$?

Solutions : $\log i = \frac{5i\pi}{2}$ et $\log(-2) = \ln 2 + i\pi$.

Exercice 6. Donner les valeurs possibles de :

$$a) i^{1/2} \quad b) (1 + i)^{3/2} \quad c) (1 + i)^i \quad d) (-1)^\pi$$

Solutions : a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ou $\frac{-\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

b) $2^{3/4} e^{3i\pi/8}$ ou $-2^{3/4} e^{3i\pi/8}$.

c) $e^{i/2 \ln 2} e^{-\pi/4 + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $e^{i\pi^2(2k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7. Déterminer la détermination de la fonction puissance $z^{1/3}$ qui prend la valeur

$$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

pour $z = 1$. Calculer les valeurs de cette fonction pour $z = 2i$, puis pour $z = -1$.

Solutions : En $2i$: $2^{1/3} (\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$ et en -1 : -1 .