PNG 302- Mathématiques pour les sciences de la matière 3.

Feuille de TD 2. Fonctions holomorphes, condition de Cauchy-Riemann.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire, i.e. $z = x + i\,y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. En utilisant seulement la définition (i.e. en revenant à un calcul de limite), montrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur l'ensemble donné, puis calculer leur dérivée :

1. $f(z) = 2$ sur $\mathbb{C}$. *Réponse :* 0.
2. $f(z) = z^2$ sur $\mathbb{C}$. *Réponse :* $2z$.
3. $f(z) = z^3$ sur $\mathbb{C}$. *Réponse :* $3z^2$.
4. $f(z) = e^{(2+i)\,z}$ sur $\mathbb{C}$. *Réponse :* $(2+i)\,e^{(2+i)\,z}$.
5. $f(z) = \frac{z}{1+z}$ sur $\mathbb{C} - \{-1\}$. *Réponse :* $\frac{1}{(1+z)^2}$.

Exercice 2. En utilisant seulement la définition, étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$a)\ f(z) = x \qquad\qquad b)\ f(z) = \overline{z}$$

Réponse : Dans les deux cas, f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$ car $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ n'a pas de limite lorsque h tend vers 0.

Exercice 3. Utiliser la condition de Cauchy-Riemann pour déterminer en quels points les fonctions suivantes sont susceptibles d'être holomorphes. Conclure en revenant à la définition.

1) $f(z) = |z|^2$ 2) $f(z) = \overline{z}$ 3) $f(z) = 3\,x + 2\,iy$ 4) $f(z) = x$

Réponses :
1) La condition de Cauchy-Riemann montre que f ne peut être holomorphe qu'en $z = 0$. Via la définition, on prouve que f est effectivement holomorphe en ce point et que $f'(0) = 0$.
2), 3) et 4) : La condition de Cauchy-Riemann n'est vérifiée en aucun point de $\mathbb{C}$.

Exercice 4. On considère la fonction de variable complexe :

$$f(z) = x^2 + i\,y^3$$

1. Utiliser la condition de Cauchy-Riemann pour déterminer en quels points la fonction f est susceptible d'être holomorphe. Dessiner dans le plan complexe l'ensemble de ces points.
   Réponse : Les points critiques sont les points d'affixe $z = x + iy$ tels que $2x = 3y^2$.
2. Supposons f holomorphe sur cet ensemble de points. Calculer, via la définition, le candidat pour sa dérivée. On notera cette fonction g.
   Réponse : $g(z) = 2x$.
3. On pose $z := \alpha + h$ avec α appartenant à l'ensemble des points déterminés en 1. On écrit $\alpha = a + i\,b$ et $h = u + i\,v$, avec $(a, b, u, v) \in \mathbb{R}^4$.
   - a) Calculer $T := \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} - g(\alpha)$.
     Réponse : $T = \frac{u^2 + i\,v^2\,(v+3b)}{u+i\,v}$.
   - b) Ecrire h en coordonnées polaires, i.e. $h = r\,e^{i\theta}$, dans l'expression de T.
     Réponse : $T = r\,e^{-i\theta}\,(\cos^2\theta + i(3\,b\sin^2\theta + r\,\sin^3\theta))$.
   - c) Déterminer la limite de T lorsque h (c'est-à dire lorsque r) tend vers 0. Conclure.
     Réponse : T tend vers 0 lorsque r (et donc h) tend vers 0. Ainsi, f est holomorphe en tout point de la parabole définie en 1.

Exercice 5. On considère la fonction de variable complexe :

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

1. Déterminer les fonctions $P(x,y)$, $Q(x,y)$ tels que $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$.
   Réponse : $P(x,y) = \sqrt{|xy|}$ et $Q(x,y) = 0$.
2. Calculer $P(x,0)$, $P(0,y)$ et $P(0,0)$. En déduire $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,x}(0,0)$ et $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,y}(0,0)$.
   Réponse : $P(x,0) = P(0,y) = P(0,0) = 0$. D'où, $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{P(x,0)-P(0,0)}{x} = 0$.
   De même, $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,y}(0,0) = 0$.
3. Conclure que la fonction f vérifie les conditions de Cauchy en $z = 0$. Donner le candidat pour sa dérivée en $(0,0)$.
   Réponse : $f'(0) = \frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,x}(0,0) - i\,\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,y}(0,0) = 0$.
4. Ecrire $T_h := \frac{f(h)-f(0)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Comme dans l'exercice précédent, on décrira h en coordonnées polaires.
   Réponse : En posant $h = r\,e^{i\theta}$, on trouve $T_h = (\sqrt{|\sin\theta\,\cos\theta|})\,e^{-i\theta}$.
5. Conclure que f n'est pas holomorphe en $z = 0$.
   Réponse : On pourra remarquer que T_h ne tend pas vers 0 lorsque h tend vers 0. On peut aussi dire que la limite de T_h est différente selon la valeur de θ.

Exercice 6. On considère la fonction de variable complexe :

$$f(z) = \frac{x^3 - y^3 + i\,(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \qquad \textit{si } z \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

1. Déterminer les fonctions $P(x,y)$, $Q(x,y)$ tels que $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$.
   Réponse : $P(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ et $Q(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
2. Calculer $P(x,0)$, $P(0,y)$ et $P(0,0)$. En déduire $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,x}(0,0)$ et $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,y}(0,0)$.
   Réponse : $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{P(x,0)-P(0,0)}{x} = 1$ et $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{P(0,y)-P(0,0)}{y} = -1$.
3. Calculer $Q(x,0)$, $Q(0,y)$ et $Q(0,0)$. En déduire $\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,x}(0,0)$ et $\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,y}(0,0)$.
   Réponse : $\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{Q(x,0)-Q(0,0)}{x} = 1$ et $\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{Q(0,y)-Q(0,0)}{y} = 1$.
4. Conclure que la fonction f vérifie les conditions de Cauchy en $z = 0$. Donner le candidat pour sa dérivée en $(0,0)$.
   Réponse : $f'(0) = \frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,x}(0,0) - i\,\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,y}(0,0) = 1 + i$.
5. Ecrire la limite de $T_h := \frac{f(h)-f(0)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Comme dans l'exercice précédent, on décrira h en coordonnées polaires.
   Réponse : En décrivant $h = r\,e^{i\theta}$, on trouve $T_h = e^{-i\theta}\,(\cos^3\theta - \sin^3\theta + i\,(\cos^3\theta + \sin^3\theta))$.
6. Conclure que la fonction f n'est pas holomorphe en $z = 0$.
   Réponse : On pourra remarquer que T_h ne tend pas vers $1 + i$ lorsque h tend vers 0. On peut aussi dire que la limite de T_h est diffŕente selon la valeur de θ.

Exercice 7. On considère la fonction de variable complexe :

$$f(z) = \frac{x\,y^2}{x^3 + y^3} \qquad \textit{si } z \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

1. Montrer que la fonction f vérifie les conditions de Cauchy en $z = 0$.
   Réponse : $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,x}(0,0) = 0 = \frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,y}(0,0)$ et $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,y}(0,0) = 0 = -\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,x}(0,0)$.
2. Montrer que la fonction f n'est pas continue en $z = 0$.
   Réponse : Prendre $z = x + i\,x$. Alors, $f(x,x) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0.
3. Conclure que f n'est pas holomorphe en 0.