PNG 302- Mathématiques pour les sciences de la matière 3.

Feuille de TD 3. Fonctions harmoniques.

Exercice 1. Soit f une fonction de variable complexe holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soient $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ les fonctions parties réelles et parties imaginaires de f supposées infiniment dérivables sur Ω. Montrer que P et Q sont harmoniques sur Ω.
Réponse : Ecrire les conditions de Cauchy-Riemann.

Exercice 2. Dans chacun des cas, montrer que la fonction de deux variables $P(x,y)$ est harmonique et trouver toutes les fonctions holomorphes f telles que P soit la partie réelle de f.

1. $P(x,y) = y$
2. $P(x,y) = 2x\,(1-y)$
3. $P(x,y) = e^x\,\cos y + 2\,(xy - x + y)$
4. $P(x,y) = 3x^2y - y^3$
5. $P(x,y) = x - xy$
6. $P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

Réponses : 1) $f(z) = -iz + ib$, $b \in \mathbb{R}$ 2) $f(z) = i\,z^2 + 2z + ib$, $b \in \mathbb{R}$.
3) $f(z) = e^z - 2z^2 - 2(1+i)z + ib$, $b \in \mathbb{R}$ 4) $f(z) = -iz^3 + ib$, $b \in \mathbb{R}$.
5) $f(z) = z + \frac{i}{2}z^2 + ib$, $b \in \mathbb{R}$ 6) $f(z) = \frac{i}{z} + ib$, $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Déterminer les fonctions holomorphes f telles que la partie réelle P de f' soit définie par :

$$P(x,y) = 3x^2 - 4y - 3y^2$$

Réponse : $f(z) = z^3 + 2iz^2 + iaz + b + ic$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 4. On considère la fonction de deux variables :

$$Q(x,y) = \sin x\,\mathrm{ch} y$$

1. Supposons que Q soit la partie imaginaire d'une fonction f holomorphe, exprimer $f'(z)$.
   On rappelle que pour tout réeel x, $\mathrm{ch}x = \cos(ix)$ et $\mathrm{sh}x = -i\sin(ix)$.
2. Trouver une fonction f holomorphe dont Q est la partie imaginaire.
   En déduire que Q est harmonique.
3. Trouver toutes les fonctions f holomorphes dont Q est la partie imaginaire.

Réponses : 1. $f'(z) = \frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,y} + i\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,x} = -i\sin x\sin(iy) + i\cos x\cos(iy) = i\cos(z)$.
2. $f(z) = i\sin(z)$ 3. $f(z) = i\sin z + a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Déterminer les fonctions réelles h et g telles que $P(x,y) = h(x) + g(y)$ soit la partie réelle d'une fonction f holomorphe dans tout le plan complexe.
Réponse : $f(z) = az^2 + \alpha z + \beta$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}$