PNG 302- Mathématiques pour les sciences de la matiï¿$\frac{1}{2}$re 3.

Feuille de TD 4. Analyse complexe: intégrales curvilignes

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire, i.e. $z = x + i\,y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. On désigne par C le quart de cercle de centre O et de rayon 1, situé dans le quart de plan $x > 0$, $y > 0$. C est orienté dans le sens direct.
Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale $I := \int_C \overline{z}\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t : 0 \to \frac{\pi}{2}$. $I = \frac{i\pi}{2}$.

Exercice 2. On désigne par C le segment de droite reliant le point A d'affixe $z_A = 1$ au point B d'affixe $z_B = i$. Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale $I := \int_C \overline{z}\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = 1 + (i-1)t$, $t : 0 \to 1$. $I = i$.

Exercice 3. On désigne par C le chemin paramétré par $\gamma(t) = (1+i)\,t$ pour t variant de 0 ï¿$\frac{1}{2}$ 1.
Dessiner le chemin C, puis calculer l'intégrale $I := \int_C (z+1)\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $I = 1 + 2\,i$.

Exercice 4. On désigne par C le carré $(OABC)$, avec $z_O = 0$, $z_A = 1$, $z_B = 1+i$ et $z_C = i$. On suppose C orienté positivement.

1. Dessiner et paramétrer le chemin C. On décomposera C en quatre chemins juxtaposés.
   Réponse : De O ï¿$\frac{1}{2}$ A : $\gamma_1(t) = t$, $t : 0 \to 1$. De A ï¿$\frac{1}{2}$ B : $\gamma_2(t) = 1 + i\,t$, $t : 0 \to 1$.
   De B ï¿$\frac{1}{2}$ C : $\gamma_3(t) = t + i$, $t : 1 \to 0$. De C ï¿$\frac{1}{2}$ O : $\gamma_4(t) = i\,t$, $t : 1 \to 0$.
2. Calculer l'intégrale $I := \int_C |z|^2\,\mathrm{d}\,z$.
   Réponse : $I = i - 1$.

Exercice 5. On désigne par C l'arc de parabole d'équation $y = 2\,x^2$, parcouru de A d'affixe $z_A = 1 + 2\,i$ vers B d'affixe $z_B = 2 + 8\,i$.
Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale $I := \int_C (x^2 - i\,y^2)\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = t + 2\,i\,t^2$, $t : 1 \to 2$. $I = \frac{511}{3} - \frac{49}{5}\,i$.

Exercice 6. On désigne par C la ligne polygonale reliant A d'affixe $z_A = 1 + i$ ï¿$\frac{1}{2}$ B d'affixe $z_B = 1 + 8\,i$, puis B ï¿$\frac{1}{2}$ D d'affixe $z_D = 2 + 8\,i$. On suppose C orienté de A vers D.
Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale $I := \int_C (x^2 - i\,y^2)\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = 1 + i + 7\,i\,t$, $t : 0 \to 1$. $I = \frac{518}{3} - 57\,i$.

Exercice 7. On désigne par C le segment de droite $[AB]$ reliant le point A d'affixe $z_A = 1 + i$ au point B d'affixe $z_B = 2 + 8\,i$.
Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale : $I := \int_C (x^2 - i\,y^2)\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = 1 + i + (1 + 7\,i\,)t$, $t : 0 \to 1$. $I = \frac{518}{3} - 8\,i$.

Exercice 8. On désigne par C le chemin défini par l'arc de cercle de centre O et de rayon 2 parcouru de A d'affixe $z_A = 2$ vers B d'affixe $z_B = 2\,i$.
Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale $I := \int_C (z^2 + 3\,z)\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = e^{2\,i\,t}$, $t : 0 \to \frac{\pi}{2}$. $I = -\frac{44}{3} - \frac{8}{3}\,i$.

Exercice 9. On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru dans le sens direct. Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale : $I := \int_C \overline{z}\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t : 0 \to 2\pi$. $I = 2\,i\,\pi$.

Exercice 10. On désigne par C le cercle de centre A d'affixe $z_A = 1$ et de rayon 1 parcouru dans le sens direct. Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale : $I := \int_C \overline{z}\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = 1 + e^{i\,t}$, $t : 0 \to 2\pi$. $I = 2\,i\,\pi$.

Exercice 11. On désigne par C le cercle de centre A d'affixe $z_A = 2$ et de rayon 4 parcouru dans le sens direct. Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale : $I := \int_C \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = 2 + 4\,e^{i\,t}$, $t : 0 \to 2\pi$. $I = 2\,i\,\pi$.

Exercice 12. On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

1. Dessiner et paramétrer le chemin C.
   Réponse : $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t : 0 \to 2\pi$.
2. Calculer l' intégrale $I_n := \int_C z^n\,\mathrm{d}\,z$ avec $n \in \mathbb{Z}$
   Réponse : $I_n = 0$ si $n \neq -1$ et $I_{-1} = 2\,i\,\pi$.
3. Soit $J := \int_C (5\,z^4 - z^3 + 2)\,\mathrm{d}\,z$. Exprimer J en fonction des I_n. En déduire la valeur de J.
   Réponse : $J = 5\,I_4 - I_3 + 2\,I_0 = 0$.

Exercice 13. On désigne par C le demi-cercle de centre O et de rayon 1, situé dans le demi plan $y > 0$ et parcouru dans le sens direct. Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale $I := \int_C y\,\mathrm{d}\,z$.
Indication : Se rappeler que $\sin t = \frac{1}{2\,i}\,(e^{it} - e^{-it})$.
Réponse : $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t : 0 \to \pi$. $I = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 14. On désigne par C le demi-cercle de centre A d'affixe $z_A = 1+i$ et de rayon 2 parcouru dans le sens direct. Dessiner et paramétrer le chemin C, puis calculer l'intégrale
$I := \int_C \frac{z}{(1+i-z)^2}\,\mathrm{d}\,z$.
Réponse : $\gamma(t) = 1 + i + 2\,e^{i\,t}$, $t : 0 \to 2\pi$. $I = 2\,i\,\pi$.