PNG 302- Mathématiques pour les sciences de la matière 3.

Feuille de TD 5. Transformations conformes.

Exercice 1. Décrire les lieux correspondants aux équations suivantes :

$$a)\,|z+i|>|z-i| \qquad b)\,1\leq|z|\leq 2 \qquad c)\,|z+2-i|\leq 1$$

$$d)\,|z-i|=|z+1| \qquad e)\,|z-i|\leq|z+1| \qquad f)\,|z|^2>z+\overline{z}$$

Réponses : a) demi-plan $y>0$ b) couronne comprise entre les cercles de rayon 1 et 2
c) intérieur du disque de centre A ($z_A=-2+i$) et de centre 1 d) droite $y=-x$
e) demi-plan de frontière $y=-x$ contenant le point $(0,1)$
f) extérieur du disque de centre A ($z_A=1$) et de rayon 1.

Exercice 2. Reconnaï¿½tre la transformation du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' :

$$a)\,z'=z-3+2i \qquad b)\,z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,z \qquad c)\,z'=-z$$

$$d)\;z'-i=2\,(z-i) \qquad e)\,z'=-i\,z \qquad f)\,z'+1=i\,z+i$$

Réponses : a) translation de vecteur d'affixe $-3+2i$ b) rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$
c) homothétie de centre O et de rapport -1 d) homothétie de centre Ω d'affixe i et de rapport 2
e) rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ f) rotation de centre Ω d'affixe -1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Exercice 3. Donner l'écriture complexe des transfomations suivantes :

1. la translation de vecteur $(1,2)$.
2. l'homothétie de centre A d'affixe $-1+i$ et de rapport -3
3. la rotation de centre B d'affixe $2-4i$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Réponses : 1. $z'=z+1+2i$ 2. $z'=-3z-4+4i$ 3. $z'=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)\,z-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i-5i$

Exercice 4. On considère le domaine rectangulaire $\mathcal{R}$ du plan (O,x,y) délimité par les droites $x=0$, $y=0$, $x=2$ et $y=1$. Dessiner $\mathcal{R}$ dans le plan complexe. On appelle $\mathcal{R}'$ l'image de $\mathcal{R}$ dans le plan (Ouv) après les transformations suivantes :

$$a)\,z'=z+(1-2i) \qquad b)\,z'=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\,z \qquad c)\,z'=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\,z+(1-2i)$$

Dans chaque cas,

1. préciser la nature de la transformation. Exprimer u et v en fonction de x et y puis x et y en fonction de u et de v.
2. dessiner $\mathcal{R}'$ et donner ses équations.

Réponses : a) La transformation est une translation de vecteur $(1,-2)$, d'où $u=x+1$ et $v=y-2$. $\mathcal{R}'$ est le domaine rectangulaire délimité par $v=-1$, $v=-2$, $u=1$ et $u=3$.
b) La transformation est la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. On trouve $u=x-y$, $v=x+y$, $x=\frac{1}{2}(u+v)$ et $y=\frac{1}{2}(-u+v)$. $\mathcal{R}'$ est le domaine rectangulaire délimité par $v=u$, $v=-u$, $v=u+2$ et $u+v=4$.
c) La transformation est le produit d'une rotation et d'une homothétie comme en b) suivi d'une translation, d'où : $u=x-y+1$, $v=x+y-2$, $x=\frac{1}{2}(u+v+1)$ et $y=\frac{1}{2}(-u+v+3)$. $\mathcal{R}'$ est le domaine rectangulaire délimité par $u-v=1$, $u+v=-1$, $v=u-3$ et $u+v=3$.

Exercice 5. 1. On considère le quadrant $\mathcal{R}$ du plan (O,x,y) correspondant ï¿½ $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Donner ses équations polaires. Trouver son image $\mathcal{R}'$ par la transformation $z' = z^2$.

2. Soit $\mathcal{R}$ est l'intérieur du triangle délimité par $x = 1$, $y = 1$ et $x + y = 1$. Dessiner $\mathcal{R}$ et trouver son image $\mathcal{R}'$ par la transformation $z' = z^2$.

Réponses :

1. $\mathcal{R}$ a pour équation polaire : $r \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. $\mathcal{R}'$ est le demi-plan supérieur : $v \geq 0$.
2. On trouve $u = x^2 - y^2$ et $v = 2xy$. $\mathcal{R}'$ est la région délimitée par les courbes $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$, $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$ et $v = \frac{1}{2}(1 - u^2)$.

Exercice 6. Calculer le jacobien des transformations suivantes :

$$a)\ z' = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\, z + (1 - 2i) \qquad\qquad b) z' = z^2$$

Réponse : a) 2 b) $4(x^2 + y^2)$

Exercice 7. Dans chaque cas, dessiner le domaine $\mathcal{R}$, puis préciser son image $\mathcal{R}'$ après la transformation indiquée :

1. Le secteur angulaire d'angle $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{m}$ avec $m \geq 1$. Transformation : $z' = z^m$.
2. La bande infinie $0 \leq y \leq a$ avec $a > 0$. Transformation : $z' = e^{\pi z/a}$.
3. La demi-bande infinie $y \geq 0$ et $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$, avec $a > 0$. Transformation : $z' = \sin(\frac{\pi z}{a})$.
   Indication : Montrer d'abord que : $\cos(\frac{\pi(x+iy)}{a}) = \sin(\frac{\pi x}{a})\,\mathrm{ch}(\frac{\pi y}{a}) + i\,\cos(\frac{\pi x}{a})\,\mathrm{sh}(\frac{\pi y}{a})$.
4. La demi-bande infinie $y \geq 0$ et $0 \leq x \leq a$, avec $a > 0$. Transformation : $z' = \cos(\frac{\pi z}{a})$.
   Indication : Montrer d'abord que : $\sin(\frac{\pi(x+iy)}{a}) = -\cos(\frac{\pi x}{a})\,\mathrm{sh}(\frac{\pi y}{a}) + i\,\sin(\frac{\pi x}{a})\,\mathrm{ch}(\frac{\pi y}{a})$.
5. La demi-bande infinie $x \geq 0$ et $0 \leq y \leq a$, avec $a > 0$. Transformation : $z' = \mathrm{ch}(\frac{\pi z}{a})$.

Réponses : Dans chaque cas, $\mathcal{R}'$ est le demi-plan supérieur $v \geq 0$.

Exercice 8. Déterminer les points fixes de la transformation $z' = \frac{2z-5}{z+4}$.
Réponse : Il s'agit de résoudre $z^2 + 2z + 5 = 0$. Solutions : $z = -1 \pm 2i$.

Exercice 9. Trouver une homographie qui fasse correspondre aux points d'affixe $z = 0$, $z = -i$ et $z = 1$ les points d'affixe $z' = i$, $z' = 1$ et $z' = 0$.
Réponse : $f(z) = -i\,\frac{z+1}{z-1}$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{R}$ le demi-plan supérieur $y \geq 0$. Quelle est l'image de $\mathcal{R}$ par l'homographie

$$z' = e^{i\theta_0}\,\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$$

oï¿½ $z_0 \in \mathcal{R}$?
Réponse : On trouve l'intérieur du cercle unité $|z'| \leq 1$.

Exercice 11. 1. Montrer que Γ est un cercle du plan complexe si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}^*$, $C \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{C}$ tels que Γ soit donnée par l'équation :

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0.$$

2. Montrer que Δ est une droite du plan complexe si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{C}$ tels que Δ soit donnée par l'équation :

$$Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0.$$

3. Soit $\phi(z) = \frac{1}{z}$ la transformation "inverse".
   (a) Quelle est l'image d'un cercle par ϕ ?
   (b) Quelle est l'image d'un cercle par ϕ ?

Réponses : 3-1 Si Γ est un cercle ne passant pas par O, son image par ϕ est un cercle. Si Γ passe par O, son image est une droite.
3-1 Si Δ est une droite ne passant pas par O, son image par ϕ est un cercle. Si Δ passe par O, son image est une droite.