# PNG 302- Mathématiques pour les sciences de la matière 3.

Feuille de TD 6. Théorème de Cauchy, formule de Cauchy.

**Exercice 1.** On désigne par $C$ le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

1. Dessiner et paramétrer le chemin $C$, puis calculer l'intégrale $I := \int_C \overline{z}\, \mathrm{d}\, z$.
   *Réponse :* $I = 2\, i\, \pi$.
2. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la fonction $f(z) = \overline{z}$ ?
   *Réponse :* Cette fonction n'est pas holomorphe : sinon, d'après le théorème de Cauchy, $I$ serait nulle.
3. Que trouverait-on en changeant $\overline{z}$ en $z^2$ ? Expliquer la différence entre ces deux fonctions.
   *Réponse :* On trouverait $I = 0$ car $f(z) = z^2$ est holomorphe.

**Exercice 2.** On désigne par $C$ le cercle de centre $A$ d'affixe $z_A = 2$ et de rayon 4 parcouru dans le sens direct. Calculer l'intégrale $I := \int_C \frac{1}{z-2}\, \mathrm{d}\, z$. Commenter cette valeur. Quelle remarque peut-on faire concernant la fonction $f(z) = \frac{1}{z-2}$ ?
*Réponse :* $I = 2\, i\, \pi \neq 0$. Le théorï¿$\frac{1}{2}$me de Cauchy ne s'applique pas car la fonction $f$ n'est pas holomorphe à l'intérieur de $C$ : elle admet un pôle en 2.

**Exercice 3.** On désigne par $C$ le carré, orienté positivement, de sommets :

$$O\ (z_O = 0) \qquad A\ (z_A = 1) \qquad B\ (z_B = 1 + i) \qquad C\ (z_C = i)$$

1. Donner, sans faire de calcul, la valeur de l'intégrale $I := \int_C (5\, z^4 - z^3 + 2)\, \mathrm{d}\, z$.
   *Réponse :* $I = 0$ en utilisant le théorème de Cauchy.
2. Aurait-on obtenu le même résultat en remplacant $(5\, z^4 - z^3 + 2)$ par $(5\, x^4 - x^3 + 2)$ ? Expliquer la différence.
   *Réponse :* Non, car la fonction $f(z) = 5\, x^4 - x^3 + 2$ n'est pas holomorphe. On peut le prouver en écrivant les conditions de Cauchy-Riemann par exemple.

**Exercice 4.** On désigne par $C$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner, sans faire de calcul, la valeur de l'intégrale $I := \int_C \frac{1}{2\, z-3}\, \mathrm{d}\, z$.
   *Réponse :* $I = 0$ en utilisant le théorème de Cauchy.
2. Aurait-on obtenu le même résultat si $C$ avait eu pour rayon 2 ? Expliquer la différence.
   *Réponse :* Non, car la fonction $f(z) = \frac{1}{2\, z-3}$ a alors un pôle ($z = \frac{3}{2}$) à l'intérieur de $C$, ce qui fait qu'elle n'est plus holomorphe sur l'intérieur de $C$.

**Exercice 5.** On appelle $I$ l'intégrale : $I := \int_C (x^2 - i\, y^2)\, \mathrm{d}\, z$.

1. On désigne par $C$ la ligne polygonale reliant $A$ d'affixe $z_A = 1 + i$ à $B$ d'affixe $z_B = 1 + 8\, i$, puis $B$ à $D$ d'affixe $z_D = 2 + 8\, i$. On suppose $C$ orienté de $A$ vers $D$. Dessiner et paramétrer le chemin $C$, puis calculer $I$.
   *Réponse :* $I = \frac{518}{3} - 57\, i$.
2. On désigne à présent par $C$ le segment de droite $[AB]$ reliant le point $A$ d'affixe $z_A = 1 + i$ au point $B$ d'affixe $z_B = 2 + 8\, i$. Dessiner et paramétrer le chemin $C$, puis calculer $I$.
   *Réponse :* $I = \frac{518}{3} - 8\, i$.
3. Comparer les résultats des deux premières questions. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la fonction $f(z) = x^2 - i\, y^2$ ? Vérifier votre affirmation en utilisant la condition de Cauchy-Riemann
   *Réponse :* Les résultats sont différents. La fonction $f(z) = x^2 - i\, y^2$ n'est donc pas holomorphe. Sinon, l'intégrale ne dépendrait pas du chemin suivi. En effet, $\frac{\mathrm{d}\, P}{\mathrm{d}\, x} = 2\, x$ et $-\frac{\mathrm{d}\, Q}{\mathrm{d}\, y} = 2\, y$ sont différents sauf en $(0, 0)$.

**Exercice 6.** On appelle $I$ l'intégrale : $I := \int_C \overline{z} \, \mathrm{d}\, z$.

1. On désigne par $C$ le quart de cercle de centre O et de rayon 1, situé dans le quart de plan $x > 0$, $y > 0$. $C$ est orienté dans le sens direct. Calculer $I$.
   *Réponse :* $I = \frac{i\,\pi}{2}$.
2. On désigne maintenant par $C$ le segment de droite reliant le point $A$ d'affixe $z_A = 1$ au point $B$ d'affixe $z_B = i$. Dessiner et paramétrer le chemin $C$, puis calculer l'intégrale $I$.
   *Réponse :* $I = i$.
3. Comparer les résultats des deux premières questions. Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'holomorphie de la fonction $f(z) = \overline{z}$ ?
   *Réponse :* La fonction $f(z) = \overline{z}$ n'est pas holomorphe puisque l'intégrale dépend du chemin suivi pour relier $A$ à $B$.

**Exercice 7.** Soit $C$ le cercle de centre $O$ et de rayon 2 orienté positivement.
En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 := \int_C \frac{1}{z-1} \, \mathrm{d}\, z \qquad I_2 := \int_C \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) \mathrm{d}\, z \qquad I_3 := \int_C \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-5}\right) \mathrm{d}\, z$$

*Réponse :* $I_1 = 2\,i\pi$, $I_2 = 4\,i\,\pi$ et $I_3 = 4\,i\,\pi$.

**Exercice 8.** En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer l'intégrale

$$I := \int_C \frac{\exp(z)}{2\,z-1} \, \mathrm{d}\, z$$

où $C$ désigne le cercle de centre O et de rayon 1 orienté positivement.
*Réponse :* $I = i\,\pi\,\sqrt{e}$.

**Exercice 9.** En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer l'intégrale

$$I := \int_C \frac{\sin(z)}{(z^2+1)\,(z+3)} \, \mathrm{d}\, z$$

où $C$ désigne le rectangle, orienté positivement, défini par les droites d'équation : $x = -1$, $y = 0$, $x = 2$ et $y = 2$.
*Réponse :* $I = \frac{\sin(i)\,\pi}{i+3}$.

**Exercice 10.** Soit $b$ un réel strictement positif. En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer l'intégrale

$$I := \int_C \frac{b^2 - z^2}{b^2 + z^2} \, \mathrm{d}\, z$$

où $C$ désigne le rectangle orienté positivement et défini par les droites d'équation : $x = -2\,b$ , $x = 2\,b$ , $y = -2\,b$ et $y = 0$. *Réponse :* $I = 2\,\pi\,b$.

**Exercice 11.** Soit $b$ un réel strictement positif. On pose $g(z) := \frac{b^2-z^2}{b^2+z^2}$. On désire calculer l'intégrale $I := \int_C g(z) \, \mathrm{d}\, z$, où $C$ désigne le carré orienté positivement, défini par les droites d'équation : $x = -2\,b$, $x = 2\,b$, $y = -2\,b$ et $y = 2\,b$.

1. Dessiner $C$. Situer sur le dessin les pôles de $g$. Préciser pourquoi, à la différence de l'exercice précédent, on ne peut pas appliquer directement la formule intégrale de Cauchy.
   *Réponse :* Les deux pôles de $g$ : $i\,b$ et $-i\,b$ sont à l'intérieur du carré.
2. Expliquer soigneusement pourquoi on peut remplacer $C$ par un nouveau chemin $C'$, formé de la réunion de deux cercles $C_1$ et $C_2$ de rayon $\frac{b}{2}$ et de centre respectif $A$ ($z_A = i\,b$) et $B$ ($z_B = -i\,b$). On représentera $C'$ sur le dessin précédent.
3. Calculer $I_1 := \int_{C_1} g(z) \, \mathrm{d}\, z$, puis $I_2 := \int_{C_2} g(z) \, \mathrm{d}\, z$.
   *Réponse :* $I_1 = 2\pi\,b^2$ et $I_2 = -\pi\,b^2$.
4. En déduire la valeur de $I$.
   *Réponse :* $I = 0$.