Université de Bordeaux I 2007 - 2008
Systèmes dynamiques - MHT621

Exercices de Travaux Dirigés
DM

Exercice 1. *Prouver que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale $(\mathbb{R}, x)$ de l'équation différentielle*

$$x' = \frac{x(t)}{1 + (x(t))^2}, \qquad x(0) = x_0.$$

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(t, x) = x - 2t \sin x$.*

1. *Prouver que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale $(]\alpha, \beta[, x)$ de l'équation différentielle*
$$\dot{x} = f(t, x)$$
telle que $0 \in]\alpha, \beta[$ et $x(0) = x_0$.
2. *Pour tout intervalle compact $[a, b]$ contenu dans $]\alpha, \beta[$, prouver l'existence de deux constantes positives A, B telle que*
$$|\dot{x}(t)| \leq A|x(t)| + B \qquad a \leq t \leq b.$$
3. *En déduire que $]\alpha, \beta[= \mathbb{R}$.*

Indication. Inégalité de stabilité: si on a $\|u'\| \leq L\|u(t)\| + M$, $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ alors

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1).$$

Exercice 3. *Soit A la matrice dans $M_3(\mathbb{R})$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*
2. *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Calculer e^A.*
4. *Résoudre le problème de Cauchy:*

$$\begin{cases} x'(t) = -3x - 2y - 2z \\ y'(t) = \ \ 2x + y + 2z \\ z'(t) = \ \ 3x + 3y + 2z \\ x(0) = \ \ x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0. \end{cases}$$

Exercice 4. *Soient*

$$A = 1/3 \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -27/2 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Résoudre les systèmes* $X' = AX$, $X' = BX$ *et* $X' = CX$ *avec* $X(0) = X_0$.
2. *Tracer l'allure des solutions autour* $(0,0,0)$ *pour plusieurs valeurs de* X_0.