Université de Bordeaux I 2007 - 2008
Systèmes dynamiques - MHT621

Dévoire surveillé
Durée: 1h 20m

Exercice 1. *Considérons le problème de Cauchy*

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) &= -x^3(t) + 7x^2(t) - 12x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

a. *Montrer que pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$, *(1) admet une unique solution maximale* $(x, I(x_0))$.
b. *Déterminer les points d'équilibre (les solutions stationnaire).*
c. *Montrer que si* $x_0 \in [0, 4]$, $I(x_0) = \mathbb{R}$.
d. *Montrer que si* $x_0 \geq 0$, *alors pour tout* $t \in I(x_0) \cap [0, +\infty[$,

$$0 \leq x(t) \leq max(x_0, 4).$$

e. *Que peut-on en déduire concernant* $I(x_0)$?

Exercice 2. *Soit* $E = \mathbb{R}^n$, $n \leq 1$, Ω *sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R} \times E$, $f \in C^1(\Omega, E)$, $(t_0, x_0) \in \Omega$. *On note* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *le produit scalaire associé à la norme euclidienne* $\|.\|$. *Soit le système differentiel*

$$(2) \qquad \begin{cases} x'(t) = & f(t, x) \\ x(t_0) = & x_0 \end{cases}$$

Montrer que si $\forall x \in E$, $\langle f(t, x), x \rangle \leq \|x\|^2$ *alors (2) admet une solution globale en temps (c.à.d.* $I = \mathbb{R}$*).*

Exercice 3. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

a. *Déterminer les valeurs propres de* A *et calculer* e^{tA} *pour* $t \in \mathbb{R}$.
b. *Résoudre le problème de Cauchy:*

$$(3) \qquad \begin{cases} x'(t) & = \quad 4y(t) \\ y'(t) & = \quad -x(t) - 4y(t) \\ x(0) = x_0 & \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

c. *Donner l'allure des solutions de* (3) *autour de* $(0, 0)$.

Exercice 4. *Soit* A *une matrice* $n \times n$ *et on considère le système* $X' = AX$. *Donner l'allure des solutions autour le point d'équilibre* $(0, 0)$ *dans les cas suivantes:*

a. $n = 2$ *et* A *admet les deux valeurs propres* $\lambda_{1,2}$:

$$(i)\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2, \qquad (ii)\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1, \qquad (iii)\ \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

b. $n = 3$ *et* A *admet les trois valeurs propres suivantes:* $-1 + i$, $-1 - i$, 2.