

Exercices de Travaux Dirigés  
Feuille 1

Cette fiche porte sur la résolution graphique des systèmes des équations différentielles.

**Exercice 1.** On considère l'équation différentielle autonome:

$$\begin{cases} x' := \frac{dx}{dt} = x(1-x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. Déterminer les solutions stationnaires (isocline de pente 0).
2. Dessiner le champ de vecteurs (ou champ de directions).
3. Dessiner une solution pour chacun des cas suivants:  $x_0 < 0$ ,  $x_0 \in ]0, 1[$ ,  $x_0 > 1$ .

**Exercice 2.** On considère les deux équations différentielles dépendantes explicitement du temps: (i)  $x' = -xt$       (ii)  $x' = x^2 - t$ .

Pour chacune d'elles:

- a. Tracer à la main le champ de directions en utilisant les isoclines.
- b. Tracer quelques solutions compatibles avec le champs de directions.

**Exercice 3.** On considère les équations différentielles:

$$(i) x' = x \quad (ii) x' = x - t \quad (iii) x' = x^2 \quad (iv) x' = x^2 - 1.$$

Vérifier que les fonctions suivantes sont des solutions:

$$(i) x = ce^t \quad (ii) x = ce^t + t + 1 \quad (iii) x = \frac{1}{c-t} \quad (iv) x = \frac{1-ce^{2t}}{1+ce^{2t}}.$$

**Exercice 4.** Associer chaque champ de vecteurs de la figure 1 avec l'une des équations suivantes:

$$(i) x' = 2 \quad (ii) x' = t \quad (iii) x' = x - t \quad (iv) x' = x$$

$$(v) x' = x/t \quad (vi) x' = -t/x \quad (vii) x' = \frac{x-2}{t-1} \quad (viii) x' = tx^2 + t^2.$$

**Exercice 5.** Résoudre graphiquement les systèmes différentiels:

$$(i) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x - 2 \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - x^2 - 3xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2y^2 - xy \\ x(0) = x_0; y(0) = y_0 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\sin(x) - \varepsilon y \\ x(0) = x_0; y(0) = y_0 \end{cases}$$