Université de Bordeaux I 2007 - 2008
Systèmes dynamiques - MHT621

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 2

Cette fiche porte sur les:
- Constante de Lipschitz.
- Existence et unicité des solutions – Lemme de Gronwall.
- Existence des entonnoirs et anti-entonnoirs.

Exercice 1. *On considère l'équation différentielle autonome:*

$$\begin{cases} x' = x(1-x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. *Montrer qu'il existe une et une seule solution maximale notée* (I, x).
2. *Montrer que la région* $|x| \leq \frac{1}{2}$ *est un anti-entonnoir et que la région* $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ *est un entonnoir.*
3. *Montrer que si* $x_0 \in]0,1[$, *alors:* $\forall t \in I,\ x(t) \in]0,1[$. *En déduire que dans ce cas,* $I = \mathbb{R}$.
4. *Montrer que si* $x_0 > 1$, *alors:* $\forall t \in I,\ x(t) > 1$. *En deduire que dans ce cas,* I *est de la forme* $]a, +\infty[$.
5. *Résoudre explicitement l'équation.*

Exercice 2. (Constante de Lipschitz)
Trouvez une constante de Lipschitz pour les équations suivantes:

(i) $x' = ax + b$
(ii) $x' = \sin tx$ *pour* $0 \leq t \leq 3, \quad -5 \leq x \leq 5.$
(iii) $x' = t^2 e^{-x}$ *pour* $-5 \leq t \leq 5, \quad -5 \leq x \leq 5.$
(iv) $x' = -C|x|.$

Exercice 3. (Existence des solutions maximales)
Déterminer toutes les solutions maximales de ces équations differentielles

(i) $x' = x^2$

(ii) $x' = -3x^{\frac{4}{3}} \sin t,$

en précisant soigneusement leurs intervalles de définition.

Exercice 4. (Unicité)
On considère l'équation, dite équation de Clairaut,

$$x = tx' - (x')^2/2.$$

a. *Montrer que les droites* $x = Ct - C^2/2$ *sont des solutions.*

b. *Montrer que la parabole $x = t^2/2$ est aussi une solution, et que toutes les droites de la question précédente sont tangentes à cette parabole.*
c. *Expliquer ce qui fait que le théorème d'unicité relatif aux équations $x' = f(t,x)$ ne puisse pas s'appliquer ici.*

Exercice 5. *Décrire en s'aidant de l'exercice précédent, les solutions de $x = tx' + (x')^2$. Pourrait-on décrire les solutions de $x = tx' + f(x')$ pour une fonction f quelconque.*

Exercice 6. (Unicité)
On considère le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = -y^2 f(x,y) \qquad\qquad \textit{avec } f(x,y) \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*). \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a. *Montrer que ce système admet une solution unique.*
b. *Montrer que si $y_0 = \frac{1}{x_0}$ alors $\forall t \in (0,T)$, $y(t) = \frac{1}{x(t)}$.*

Exercice 7. (Comparaison de solutions)
Soit y et z dérivables sur $[0,T]$ et telles que $y'(t) = f(t,y(t))$ et $z'(t) < f(t,z(t))$ pour tout $t \in [0,T]$. On suppose que $z(0) < y(0)$. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$, on a $z(t) < y(t)$.

Exercice 8. (Lemme de Gronwall)

1. *Soient $(\varepsilon, \delta, K) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$ et $z : \ [t_0,T] \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive tels que $z(t) \leq \delta + K\int_{t_0}^t z(s)ds + \varepsilon(t-t_0)$. Montrer que $z(t) \leq \delta e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0} - 1)$.*
2. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[t_0,T]\times[a,b]$ et globalement K-lipschitziennes en x telles que $|f(t,x) - g(t,x)| \leq \varepsilon$. On note y la solution du problème de Cauchy $y' = f(t,y)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ et z la solution du problème de Cauchy $z' = g(t,z)$ avec $z(t_0) = z_0$. Montrer que*
$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0|e^{K|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K|t-t_0|} - 1).$$
3. *Montrer que l'équation $y' = \sin(ty)$ avec condition initiale $y(0) = \frac{1}{10}$ possède une unique solution sur $[0, \frac{1}{2}]$.*
4. *Résoudre l'équation approchée $z' = tz$ avec condition initiale $z(0) = \frac{1}{10}$.*
5. *Pourrait-on trouver une majoration de l'erreur $E(t) = y(t) - z(t)$?*

Exercice 9. (Entonnoir – barrières inférieures et suppérieures)
On considère l'équation $\qquad x' = x^2 - t.$

1. *Tracer les isoclines $x^2 - t = 0$, $x^2 - t = 1$, $x^2 - t = -1$, en précisant pour quelle intervalle du temps ils sont des barrières inférrieur ou suppérieur.*
2. *En déduire l'existence d'entonnoir et d'anti-entonnoir.*
3. *Que peut-on dire de la solution du problème de Cauchy pour $-\sqrt{t_0} \leq x_0 \leq \sqrt{t_0}$.*
4. *Déterminer les régions du plan où pour $-\sqrt{t_0 - 1} \geq x_0$ la solution vérifie $-\sqrt{t-1} \geq x(t)$ pour $t_0 > 5/4$.*
5. *Déterminer les régions du plan où les solutions de $\alpha' = \alpha^{3/2}$ sont des barrières inférieures. En déduire qu'il y a des solutions qui explosent en temps fini.*