Université de Bordeaux I 2007 - 2008
Systèmes dynamiques - MHT621

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 3

Exercice 1. *On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' &= \frac{x}{1+t^2+x^2}, \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

1. *Montrer qu'il admet une unique solution maximale* (I, x) *pour une donnée de Cauchy* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. *Déterminer les solutions stationnaires. Que peut-on en déduire?*
3. *Montrer que pour* $\pm x_0 > 0$, $\pm x'(t) > 0$ *pour tout* $t \in I$. *En déduire que l'extrémité gauche de* I *est* $-\infty$.
4. *Montrer que* $(x^2)' \leq 2$. *En déduire que* $I = \mathbb{R}$.

Exercice 2. *On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} P' &= -P^3 + 3P^2 - 2P, \quad t \geq 0, \\ P(0) &= \alpha. \end{cases}$$

1. *Montrer que pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ce problème admet une unique solution maximale* $(I(\alpha), P)$.
2. *Déterminer les solutions stationnaires.*
3. *Montrer que si* $\alpha \in [0, 2]$, $I(\alpha) = \mathbb{R}$.
4. *Montrer que pour* $\alpha > 0$, *il possède une unique solution globalement définie sur* $[0, +\infty[$ *et que l'on a* $0 \leq P(t) \leq \max(\alpha, 2)$.

Exercice 3. *Prouver que, pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$, *il existe une unique solution maximale* $(\mathbb{R}, x)$ *de l'équation différentielle*

$$x' = f(t, x), \qquad x(0) = x_0,$$

dans les cas suivantes (i) $f(t, x) = 3\sin(x(t))x(t)$ $\quad (ii)$ $f(t, x) = Ax(t)$ *avec* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. *Soient* I *un intervalle ouvert non vide de* $\mathbb{R}$, E *un espace de Hilbert dont on note* $(\cdot|\cdot)$ *le produit scalaire,* $\Omega = I \times E$ *et* $f : \Omega \to E$ *une application continue localement lipschitzienne en la seconde variable. On suppose que*

$$(f(t, x)|x) \leq a(t)\|x\|^2 + b(t) \qquad (t, x) \in \Omega$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ *sont continues.*

1. *Montrer que, pour tout* $(t_0, x_0) \in \Omega$, *l'équation différentielle*

$$x' = f(t, x)$$

possède au moins une solution maximale $(]\alpha_0, \beta_0[, \varphi_0)$ *telle que* $\varphi_0(t_0) = x_0$.

2. *Etablir l'inégalité*
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_0(t)\|^2 \leq a(t)\|\varphi_0(t)\|^2 + b(t) \qquad t \in]\alpha_0, \beta_0[.$$
3. *En déduire que* $]\alpha_0, \beta_0[= I$.

Exercice 5. *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que*
$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0, \qquad \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|dt < +\infty.$$
On considère l'équation différentielle du second ordre
$$y'' + (1 + \varphi(t))y = 0 \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

1. *Prouver que les solutions maximales de* (1) *sont définies sur tout* $\mathbb{R}$ *et sont de classe* $\mathcal{C}^3$. *(Transformer l'équation en une équation du type* $\dot{X} = F(t, X)$, *où* X *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}^2$.)
2. *Soit* $(\mathbb{R}, y)$ *une solution maximale de* (1). *Prouver que la fonction* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*
$$E(t) = \frac{(y'(t))^2}{2} + \frac{(y(t))^2}{2} + \int_0^t \varphi(s)y(s)y'(s)ds$$
est constante.
3. *Etablir l'existence d'une constante* $A \in \mathbb{R}$ *telle que*
$$(y(t))^2(1 + \varphi(t)) \leq A - (y'(t))^2 + \int_0^t |\varphi'(s)|(y(s))^2 ds$$
pour tout $t \geq 0$, *et l'existence de* $t_0 \geq 0$ *pour lequel*
$$(y(t))^2 \leq 2A + 2\int_0^t |\varphi'(s)|(y(s))^2 ds$$
pour tout $t \geq t_0$.
4. *Prouver enfin que* y *reste borné sur* $[0, +\infty[$.

Exercice 6. *On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est quasihomogène s'il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que*
$$f(\lambda^\alpha t, \lambda^\beta x) = \lambda^{\beta-\alpha} f(t, x)\,.$$

1. *Montrer qu'une équation différentielle quasihomogène*
$$x' = f(t, x)\,,$$
se transforme en une équation à variables séparables. (Indication: $x^\alpha = t^\beta y$*).*
2. *Résoudre cette équation.*
3. *Applications:* (*i*) $f(t, x) = \frac{-x^2}{t^3}$, $\qquad$ (*ii*) $f(t, x) = \frac{x^2-t^2}{x^2+t^2}$, $\qquad$ (*iii*) $f(t, x) = \frac{x-t^2}{t}$.