Université de Bordeaux I 2007 - 2008
Systèmes dynamiques - MHT621

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 4

Exercice 1. *Résoudre les équations différentielles suivantes.*

1. $x' = t\,x\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$
2. $x' = t\,x + f(t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}\,, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*
3. $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$
4. $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F(t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R},$$
   et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *continue.*
5. $x'' = a^2 x\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad x'(0) = x_1\,, \quad x_0, x_1, a \in \mathbb{C},\ a \neq 0\,.$ *Donner la solution dans les cas* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $a = ib$, $b \in \mathbb{R}^*$.
6. $x'' = a^2 x + f(t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad x'(0) = x_1\,, \quad x_0, x_1, a \in \mathbb{C}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$

Exercice 2. *Soit* P *un polynôme complexe de degré* n *dont les racines* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *sont simples.*

1. *Ecrire l'équation* $P(D)x = 0$, *où* $D = \frac{d}{dt}$, *sous forme d'un système différentiel du premier order.*
2. *Résoudre le système.*

Exercice 3. *Soient* $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *deux fonctions à support compact. Déterminer les solutions des équations aux dérivées partielles suivantes.*

1. $u_t = u_{xx}, \quad u(0, x) = u_0(x)\,, \quad u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$
2. $u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0, x) = u_0(x)\,, \quad u_t(0, x) = u_1(x)\,, \quad u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$

(Utiliser la transformée de Fourier en x.)

Exercice 4. *Soit* A *une matrice réelle carrée de taille* 2 *et soient* $\lambda_1,\ \lambda_2$ *ses valeurs propres. On considère le système linéaire*

$$x' = Ax.$$

Tracer le portrait de phase du système, en fonction de $\lambda_1,\ \lambda_2$*:*

a. $\lambda_1,\ \lambda_2$ *sont réelles*

(i) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0,$ (ii) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0,$ (iii) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2,$ (iv) $0 < \lambda_1 = \lambda_2,$
(v) $0 < \lambda_1 < \lambda_2,$ (vi) $\lambda_1 < \lambda_2 = 0,$ (vvi) $\lambda_1 = 0 < \lambda_2.$

b. $\lambda_1,\ \lambda_2$ *sont complexes,* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm iw$

$$(i)\ \alpha = 0, \qquad (ii)\ \alpha < 0, \qquad (iii)\ \alpha > 0.$$

Exercice 5. *Résoudre les systèmes différentiels ci-dessous. Trouver les points d'équilibre et dessiner les trajectoires en indiquant le sens de parcours.*

$$(a) \left\{ \begin{array}{rr} x' = & x \\ y' = & 2y \end{array} \right. \quad (b) \left\{ \begin{array}{rr} x' = & -x \\ y' = & 2y \end{array} \right. \quad (c) \left\{ \begin{array}{rr} x' = & 0 \\ y' = & x \end{array} \right. \quad (d) \left\{ \begin{array}{rr} x' = & -x \\ y' = & x \end{array} \right. \quad (e) \left\{ \begin{array}{rr} x' = & y \\ y' = & -x \end{array} \right.$$