Université de Bordeaux I 2007 - 2008
Systèmes dynamiques - MHT621

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 5

Cette fiche porte sur les:
- Endomorphismes diagonalisables ou trigonalisable.
- Rśolutions des systèmes en calculant des exponentielles des matrices.

Exercice 1. *(Question de cours) Soit A une matrice $n \times n$ et P une matrice inversible.*

1. *Montrer que* $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ *pour tout entier k. En déduire que* $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.
2. *Montrer que* $\exp(t+s)A = \exp(tA)\exp(sA)$. *En déduire que* $\exp(tA)$ *est inversible et que son inverse est* $\exp(-tA)$.
3. *En utilisant le fait que* $k! > (k-2)!$ *pour tout* $k \geq 2$, *montrer que l'on a pour toute matrice A la majoration*
$$\| \exp(A) - (I + A)\| \leq \|A\|^2 \exp(\|A\|).$$
4. *En déduire que* $(\exp(hA) - I)/h$ *tend vers A quand h tend vers zéro.*
5. *En déduire*
$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) := \lim_{h\to 0} \frac{\exp((t+h)A) - \exp(tA)}{h} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Exercice 2. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. *Quelles sont les valeurs propres de A.*
2. *Déterminer une base de chaque sous-espace caractéristique de $\mathbb{R}^3$ ($\supseteq$ sous-espace propres).*
3. *Soit u_1 une base de $F = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\{u_2, u_3\}$ une base de $G = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$. Représenter la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).*

Exercice 3. *Soit m un nombre réel et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. *Quelles sont les valeurs propres de f? En particulier, préciser leur nombre.*
2. *Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable?*
3. *Supposons $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
4. *Supposons $m = 1$.*

a. *Montrer que l'endomorphisme f est trigonalisable.*
b. *Soit e_1 un vecteur propre de f pour la valeur propre 1. Montrer qu'il existe un vecteur $e_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(f - I)(e_2) = e_1$.*
c. *Soit e_3 un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (e_1, e_2, e_3).*
d. *Calculer $f^k(e_2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k.*
e. *Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
f. *Calculer e^A.*

Exercice 4. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que l'endomorphisme f est trigonalisable.*
2. *Déterminer une base de chaque sous-espace caractéristique de $\mathbb{R}^4$.*
3. *Trouver les matrices D et N de $M_4(\mathbb{R})$ telles que $A = D + N$, $ND = DN$, D est Diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et N est nilpotente.*
4. *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
5. *Calculer e^A.*

Exercice 5. *On considère le système*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

a. *Trouver la solution de (1) avec la condition initiale $x(0) = (1, 0)$.*
b. *Donner l'allure des solutions de (1) autour de $(0, 0)$.*

Exercice 6. *Résoudre* $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2.$

Déterminer pour $t > 0$ les solutions de $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x + e^{2t} \ln t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

On pourra poser $x = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix} y.$

Exercice 7. *(Méthode de variation de la constante) Résoudre le système*

$$\begin{cases} x' = & 3x + y + te^t \\ y' = & -x + y + e^t \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Exercice 8. *On considère le système*

$$\begin{cases} x' = & -x + y - z \\ y' = & x + 2y + z \\ z' = & 3x - y + 3z \end{cases}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Résoudre (3) par deux méthodes. (En calculant ou non e^{tA})