Université de Bordeaux I 2007 - 2008
Systèmes dynamiques - MHT621

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 6

Exercice 1. *Etudier la stabilité des systèmes linéaires suivants et donner l'allure des solutions autour de* $(0,0)$*:*

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x + 4y \\ y' = -9x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -x - 4y \end{cases}$$

Exercice 2. *On considère les équations différentielles*

$$x'' = x + x^3, \qquad x'' = -x + x^3,$$

$$x'' = x - x^3, \qquad x'' = -x - x^3.$$

Traiter les questions suivantes pour chacune de ces équations.

1. *Ecrire l'équation sous la forme d'un système différentiel de premier ordre.*
2. *Déterminer les points stationnaires et tracer l'allure des courbes solutions au voisinage de ces points dans le plan* (x, x').
3. *Trouver une fonction* $H(x', x)$ *telle que* $H(x'(t), x(t)) = const.$ *si* $x(t)$ *est une solution. (Multiplier l'équation par* x' *et intégrer par rapport à* t*).*
4. *Déterminer l'allure qualitatvie du portrait de phase.*

Exercice 3. *On considère le système différentiel suivant :*

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = x(1 - y) \\ \\ y' = y(x - 1) \end{cases}$$

Soient $x_0 > 0$ *et* $y_0 > 0$*. On s'intéresse au problème de Cauchy* (P) *pour l'équation (1) avec comme données initiales* $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

1. *Montrer qu'il existe une solution maximale unique à ce problème de Cauchy. On note* $\big(I, (x, y)\big)$ *la solution maximale de* (P).
2. *Montrer que pour tout* $t \in I$, $x(t) > 0$ *et* $y(t) > 0$.
3. *Pour* $t \in I$*, on pose* $\psi(t) = \ln x(t) + \ln y(t) - x(t) - y(t)$.
   Montrer que pour tout $t \in I$*, la fonction* ψ *est constante (sa valeur dépend bien sûr de la donnée initiale).*

4. *Soit* $C \in \mathbb{R}$. *On définit* K_C *par*
$$K_C = \Big\{ (u,v) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+},\ \ \ln u + \ln v - u - v = C \Big\}$$
Montrer que K_C *est borné et en déduire que* $I = \mathbb{R}$.
5. *On suppose que* $x_0 = y_0 = 1$. *Résoudre* (P).
6. *On divise le quart de plan* $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ *en quatre zones :*
$$A = \big\{ (u,v), 0 < u < 1, 0 < v < 1 \big\},\ B = \big\{ (u,v), u > 1, 0 < v < 1 \big\}$$
$$C = \big\{ (u,v), u > 1, v > 1 \big\},\ D = \big\{ (u,v), 0 < u < 1, v > 1 \big\}$$
Montrer que si $(x_0, y_0) \neq (1,1)$, *alors la solution passe successivement de* A *à* B *à* C *et à* D *pour revenir dans* A.
7. *On définit* f *par*
$$f : \begin{array}{l} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \ln u - u - 1 \end{array}$$
Montrer que f *est bijective. En déduire que si* $(x_0, y_0) \neq (1,1)$, *la solution du problème de Cauchy* (P) *est périodique.*
8. *Linéariser le problème et tracer l'allure des solutions autour* $(1,1)$.

Exercice 4. *On considère le problème*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& -x^3 - xy^2 - y \\ y' &=& -y^3 - yx^2 + x \end{array} \right.$$

1. *Etudier le problème linearisé en* $(0,0)$.
2. *Ecrire l'équation différentielle vérifiée par* $u(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ *et la résoudre. Conclusion?*

Exercice 5. *Etudier la stabilité des solutions stationnaires de*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x^2 + y^2 - 25 \\ y' &=& xy - 12 \end{array} \right.$$

Exercice 6. *On considère le système :*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y' &=& x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right.$$
Montrer que l'origine est une solution asymptotiquement stable.

Exercice 7. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on considère le système :*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& y + \lambda(x^3 + 2xy^2) \\ y' &=& -x + \lambda y^3 \end{array} \right.$$

a. *Le système linéarisé autour de la solution nulle est-il stable?*
b. *Montrer que si* $\lambda < 0$ *l'origine est une solution asymptotiquement stable.*
c. *Montrer que si* $\lambda > 0$ *l'origine est une solution instable.*
d. *Montrer que si* $\lambda = 0$ *l'origine est une solution stable mais non-asymptotiquement stable (calculer la solution).*