Université de Bordeaux I 2007 - 2008
Systèmes dynamiques - MHT621

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 7

Cette fiche porte sur les:
• Wronskiens d'un système fondamental des solutions.
• Fonctions de Lyapunov.

Exercice 1. *Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ quand $|x| \to +\infty$. On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' &= 2y, \\ y' &= -\phi'(x), \\ x(0) &= x_0, \ \ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Montrer que si x_0 est un minimum local stricte de ϕ alors la solution $(0, x_0)$ est stable. Est-elle asymptotiquement stable? (voir d. de l'exercice précédent).

Rappel: Le déterminant $w(t) = \det[M(t)]$ est appelé le wronskien des n solutions qui forment le système fondamental des solutions (linéairement indépendantes) et définissent $M(t)$.
Ex: Si u_1, u_2 deux solutions réelles non proportionnelles d'une équation différentielle de second ordre:

$$M(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix}, \quad w(t) = \det(M(t)) = u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t).$$

Rq.: Deux solutions forment un système fondamental si et seulement si leur wronskien est non nul en un point t_0. Et dans ce cas, le wronskien ne s'annule en aucun point. Référence: [Mathématique pour la physique, Pierrette Benoist-Gueutal]

Exercice 2. *Soient p, q :$]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.*

a. *Deux solutions sur $]a, b[$, φ_1, φ_2 de l'équation différentielle linéaire du second ordre sur $]a, b[$:*
$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \qquad (1)$$
qui s'annulent en $t_0 \in]a, b[$ peuvent-elles former un système fondamental de solutions?

b. *Même question lorsqu'on suppose seulement que t_0 est un point d'extremum des deux solutions φ_1 et φ_2.*

c. *Montrer que si (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions de (1) et si t_0 est un point d'inflexion de φ_1 et φ_2, alors $p(t_0) = q(t_0) = 0$.*

d. *Soit* (φ_1, φ_2) *est un système fondamental de solutions de (1). On suppose* φ_1 *connue ne s'annulant pas. Établir la relation*

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = Ce^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \qquad C \in \mathbb{R}, \quad t_0,\ t \in]a, b[,$$

et en déduire une expression de φ_2.

e. *Intégrer l'équation différentielle*

$$t^2\ddot{x} - t\dot{x} + t = 0$$

dans $]0, +\infty[$.

Exercice 3. *En construisant une fonction de Lyapunov de la forme* $V(x,y) = a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2}$, *étudier la stabilité de* $(0,0)$ *pour :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y^3 \\ \dot{y} = x\,y^2 - y^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x,y)\,y - x \end{cases} \quad \textit{avec } f \geq 0, \ > 0$$

$$\begin{cases} x' &= -x^3 + xy^2 \\ y' &= -2x^2y - y^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -\frac{x^3}{2} + 2xy^2 \\ y' &= -y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= -x^3 + 2y^3 \\ y' &= -2xy^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= x^3 - y^3 \\ y' &= 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= -x^3 \\ y' &= -y^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -y + x(x^2+y^2) \\ y' &= x + y(x^2+y^2) \end{cases}$$

Exercice 4. *Même question pour:*

$$\begin{cases} x_1' = 2x_2(x_3 - 1) \\ x_2' = -x_1(x_3 - 1) \\ x_3' = -x_3^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1' = 2x_2(x_3 - 1) \\ x_2' = -x_1(x_3 - 1) \\ x_3' = x_3^3 \end{cases}$$

Exercice 5. *(Système de Lorenz) Soit* $\sigma, r, b \in \mathbb{R}^{*+}$. *On considère le système autonome suivant:*

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = rx - y - xz \\ z' = -bz + xy \end{cases}$$

1. *Etudier par une méthode de linéarisation les propriètés de stabilité du point stationnaire* 0.
2. *Soit* $L(x,y,z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2 \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. *Montrer que* L *est une fonction de Lyapunov stricte si* $r < 1$ *et large si* $r = 1$. *Que peut-on conclure?*