Devoir maison 1

Exercice 1. Soit l'application $f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$, $f(z) = 1 + z^2$.
a. Montrer que f est surjective.
b. L'application f est il injective?
c. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soient a et b deux nombres rationnels et f l'application de l'ensemble des nombres rationnels dans lui même qui à chaque rationnel x associe $f(x) = ax + b$. Suivant la valeur de a, cette application est-elle injective, surjective?

Exercice 3. Sur $\mathbb{K}^* = \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ telle que si x et y appartiennent à $\mathbb{K}^*$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x/y est un carré dans $\mathbb{K}^*$.
a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b. Combien y a-t-il de classes d'équvalence lorsque $\mathbb{K}^* = \mathbb{R}^*$.
c. Combien en y a-t-il lorsque $\mathbb{K}^* = \mathbb{C}^*$.

Exercice 4. Soit A un ensemble fini et G l'ensembles des applications bijectives de $A \longmapsto A$. On définit le relation:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \exists f \in G \text{ tq } f(a) = b.$$

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.
b. Soit $a \in A$, montrer que $(G_a = \{f \in G;\ f(a) = a\}, \circ)$ est un sous groupe de G.

Exercice 5. Soit E l'ensemble de couple (a, b) ou a et b sont des nombres réel avec $a \neq 0$. On définit sur E une opération en posant:

$$(a, b)\bigstar(a', b') = (aa', a'b + ba').$$

Montrer que E muni de cette opération est un groupe.

Exercice 6. Soit $G = \mathbb{R}\diagdown\{1\}$, muni de la loi $\star$ suivante:

$$x \star y = xy - x - y + 2.$$

Vérifier que $(G, \star)$ est un groupe. Est-il abélien ?

Exercice 7. Soit $f : G \longmapsto K$ un homomorphisme de groupes entre les groupes G et K.
a. Montrer que pour tout $a \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(a^n) = (f(a))^n.$$

b. Si f est bijective, alors $h = f^{-1} : K \longmapsto G$ est un isomorphisme.