Devoir maison 2

Exercice 1. *On pose* $G = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. *Soit* $f : G \longrightarrow G$ *l'application qui à* (x, y) *associe* $f(x, y) = (3x, x - y)$.

a. *Montrer que* f *est un morphisme de groupe.*
b. *Déterminer le noyau de* f. *Déterminer l'image de* f.
c. *Le noyau de* f *est-il cyclique, distinguée? Justifier votre réponse.*
d. *L'image de* f *est-elle cyclique? Justifier votre réponse.*

Exercice 2. *On considère l'anneau* $A = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

a. *Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau* A.
b. *Déterminer les éléments* $x \in A$ *qui vérifient l'équation* $x^2 + \overline{2}x - \overline{3} = \overline{0}$.

Exercice 3. *On munit* $\mathbb{Z}^2$ *des lois* $+$ *et* $\cdot$ *définies par* $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ *et* $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$.

a. *Montrer que* $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ *est un anneau commutatif.*
b. *Montrer que* $\{(a, a); a \in \mathbb{Z}\}$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{Z}^2$.
c. *Montrer que* $\{(a, 0); a \in \mathbb{Z}\}$ *est un anneau pour les lois* $+$ *et* $\cdot$ *de* $\mathbb{Z}^2$. *Est-ce un sous-anneau de* $\mathbb{Z}^2$ *? Est-ce un idéal de* $\mathbb{Z}^2$ *?*

Exercice 4. *Soient* p, q *deux entiers naturels. Montrer que*

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}, +, \cdot) & \longmapsto & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +, \cdot); \\ \bar{a} & \longmapsto & (\bar{a},\ \bar{a}) \end{array}$$

(les trois $^-$ *ont des significations toutes distinctes ...) définit un homomorphisme d'anneaux.*

Exercice 5. *On définit sur* $\mathbb{R}$ *les deux lois* $\oplus$ *et* $\otimes$ *par*

$$x \oplus y = x + y - 1,$$

$$x \otimes y = x + y - xy.$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ *est un corps.*

Exercice 6. *(Structure d'anneaux sur* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*) Soit* $n \geq 2$ *un entier naturel. soit* A *le groupe de congruence* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. *Si* x *est un entier, on note par* $\bar{x}$ *sa classe modulo* n.

a. *Soient* $\bar{x},\ \bar{y} \in A$. *Posons*
$$\bar{x} * \bar{y} = \overline{xy}.$$
Montrer que $(A, +, *)$ *est un anneau commutattif (unitaire).*
b. *Écrire la table de multiplication dans* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
c. *Montrer que* $\bar{a}$ *est un diviseur de* 0 *si* a *et* n *ont un diviseur commun (autre que* 1 *et* -1*), et que* $\bar{a}$ *est un inversible sinon. (voir aussi Feuille 5 Ex II-4)*
(Indication:voir EX II-4 Feuille 5)
d. *Montrer que* A *est un corps si et seulement si* n *est un nombre premier.*