

---

# Schémas AP

[Bennoune-Lemou-LM, JCP 07], [Lemou-LM, SISC 08]

- schémas numériques pour les équations cinétiques
- stabilité en temps uniformément par rapport à  $\varepsilon$  ;
- schéma obtenu dans les régimes fluides ( $\varepsilon \ll 1$  et  $\varepsilon = 0$ ) doit être consistant avec les modèles fluides correspondants
- utilisation de la décomposition micro-macro
- méthode très générale (limites hydro. et de diffusion)
- **Références :**
  - diffusion : Klar (98,99), Jin-Pareschi-Toscani(98–00)
  - hydro. (Boltzmann/Euler) : Coron-Perthame (91), Gabetta-Pareschi-Toscani (97)

[Bennoune-Lemou-LM, JCP 07]

➡ équation de Boltzmann :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f)$$

➡  $\varepsilon = 0$  : équations d'Euler ( $U = (\rho, \rho u, E) = \langle m f \rangle$ )

$$\partial_t U + \nabla_x \cdot F(U) = 0$$

➡  $\varepsilon \ll 1$  : équations de Navier-Stokes (CNS) :

$$\partial_t U + \nabla_x \cdot F(U) = -\varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla_x \cdot \sigma \\ \nabla_x \cdot (\sigma u + q) \end{pmatrix},$$

⇒ décomposition micro-macro :  $f = M[U] + \varepsilon g$

$$\partial_t M(U) + v \cdot \nabla_x M(U) + \varepsilon(\partial_t g + v \cdot \nabla_x g) = \mathcal{L}_{M(U)} g + \varepsilon Q(g, g)$$

⇒ propriété :  $g \perp \mathcal{N}(\mathcal{L}_{M(U)})$  où  $\mathcal{L}_{M(U)} = DQ(M(U))$

⇒  $\Pi_{M(U)}$  : projection orthogonale sur  $\mathcal{N}(\mathcal{L}_{M(U)})$

⇒ système couplé :

$$\partial_t U + \nabla_x \cdot F(U) + \varepsilon \nabla_x \cdot \langle v m g \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial_t g + (I - \Pi_{M(U)})(v \cdot \nabla_x g) &= \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_{M(U)} g + Q(g, g) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} (I - \Pi_{M(U)})(v \cdot \nabla_x M(U)). \end{aligned}$$

schéma semi-implicite en temps :

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot F(U^n) + \varepsilon \nabla_x \cdot \langle v m g^{n+1} \rangle &= 0, \\ \frac{g^{n+1} - g^n}{\Delta t} + (I - \Pi_{M(U^n)})(v \cdot \nabla_x g^n) &= \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_{M(U^n)} g^{n+1} + Q(g^n, g^n) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} (I - \Pi_{M(U^n)})(v \cdot \nabla_x M(U^n)). \end{aligned}$$

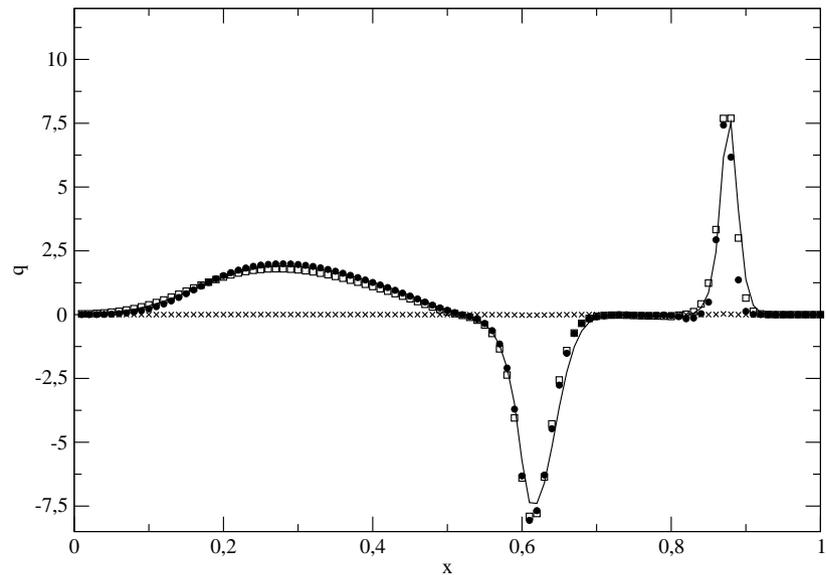
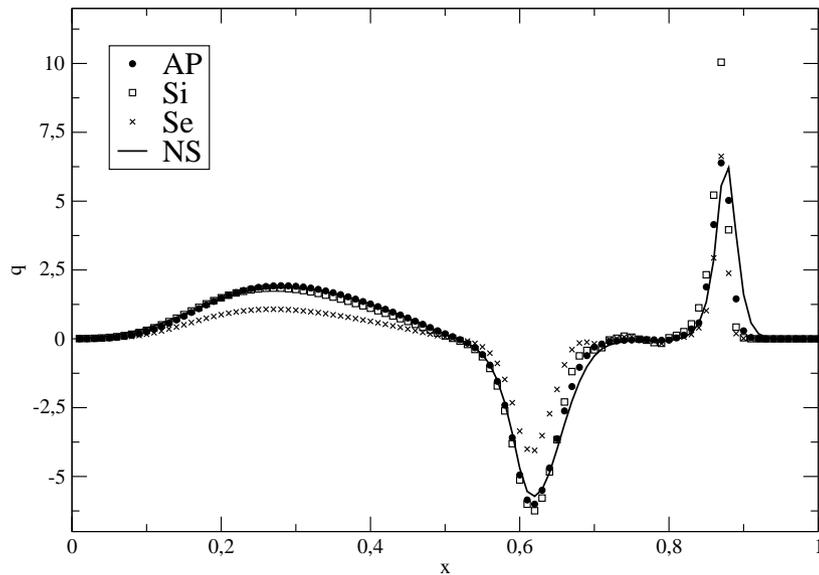
(donne à l'ordre 2 en  $\varepsilon$  un schéma explicite en temps consistant avec les équations CNS)

discrétisation spatiale : grilles décalées

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2}}(U^n) - F_{i-\frac{1}{2}}(U^n)}{\Delta x} + \varepsilon \left\langle vm \frac{g_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - g_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} \right\rangle &= 0, \\ \frac{g_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - g_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + (I - \Pi_{i+\frac{1}{2}}^n) \left( v^+ \frac{g_{i+\frac{1}{2}}^n - g_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + v^- \frac{g_{i+\frac{3}{2}}^n - g_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_{M_{i+\frac{1}{2}}^n} g_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + Q(g_{i+\frac{1}{2}}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n) - \frac{1}{\varepsilon} (I - \Pi_{i+\frac{1}{2}}^n) \left( v \frac{M_{i+1}^n - M_i^n}{\Delta x} \right), \end{aligned}$$

asymptotiquement équivalent à  $\varepsilon^2$  près à un schéma :

- explicite en temps
- consistant avec les équations CNS
- approchant les flux diffusifs CNS à l'ordre 2 en espace



Test de Sod : flux de chaleur

( $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$  (gauche) et  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$  (droite))

$\Delta t = 2 \times 10^{-3}$ .

- schéma Se : ne capture pas CNS

- schémas AP et Si : capturent CNS

[Lemou-LM, SISC 07]

➤ transport linéaire :  $\partial_t f + \frac{1}{\varepsilon} v \partial_x f = \frac{\sigma_S}{\varepsilon^2} (\rho - f)$

➤ limite  $\varepsilon = 0$ , diffusion :  $\partial_t \rho - \partial_x (\kappa \partial_x \rho) = 0$

➤ raideur de la collision et du transport

➤ décomposition micro-macro :  $f = \rho + \varepsilon g$

➤ système couplé (avec projection) :

$$\partial_t \rho + \partial_x \langle v g \rangle = 0,$$

$$\partial_t g + \frac{1}{\varepsilon} (I - \Pi)(v \partial_x g) = -\frac{\sigma_S}{\varepsilon^2} g - \frac{1}{\varepsilon^2} v \partial_x \rho.$$

système couplé (avec projection) :

$$\partial_t \rho + \partial_x \langle vg \rangle = 0,$$

$$\partial_t g + \frac{1}{\varepsilon} (I - \Pi)(v \partial_x g) = -\frac{\sigma_S}{\varepsilon^2} g - \frac{1}{\varepsilon^2} v \partial_x \rho.$$

schéma discret :

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \left\langle v \frac{g_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - g_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} \right\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{g_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - g_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon \Delta x} (I - \Pi) \left( v^+ (g_{i+\frac{1}{2}}^n - g_{i-\frac{1}{2}}^n) + v^- (g_{i+\frac{3}{2}}^n - g_{i+\frac{1}{2}}^n) \right) \\ = -\frac{\sigma_S}{\varepsilon^2} g_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} v \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x}. \end{aligned}$$

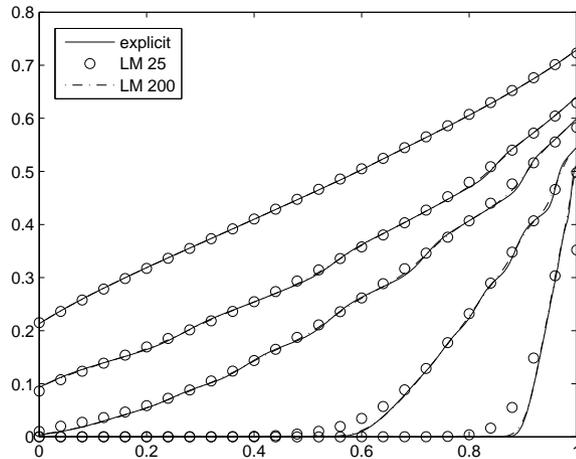
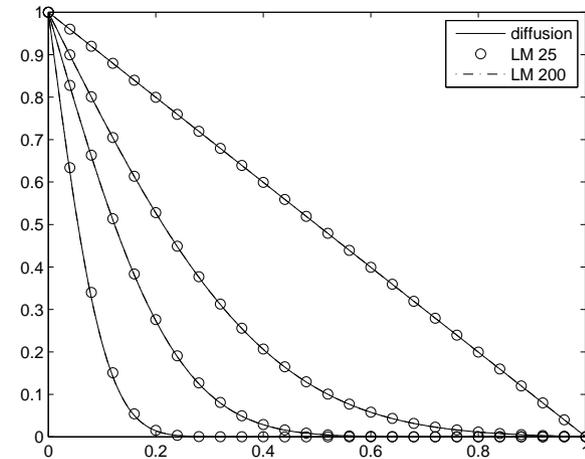
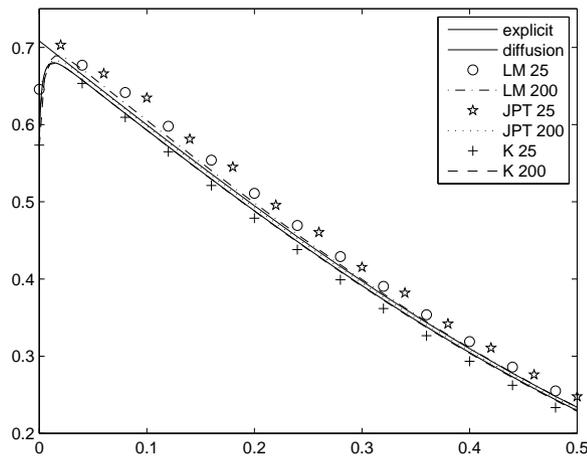
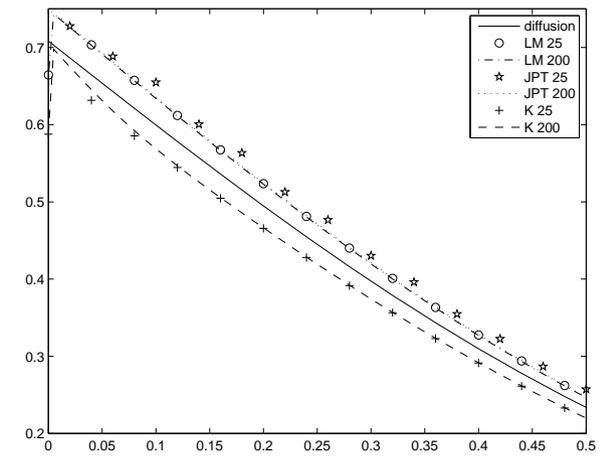
▣▣▣▣ limite  $\varepsilon = 0$  : le schéma devient

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \left( \kappa_{i+\frac{1}{2}} \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x} - \kappa_{i-\frac{1}{2}} \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{\Delta x} \right) = 0,$$

▣▣▣▣ dans un cas simplifié : stabilité  $L^2$  si

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x^2}{2} + \varepsilon \Delta x \right). \quad (0.1)$$

▣▣▣▣ étude des CL : bon comportement du schéma, même pour certaines couches limites


 $\varepsilon = 1$ 

 $\varepsilon = 10^{-8}$ 

 $\varepsilon = 10^{-2}$ 

 $\varepsilon = 10^{-4}$

- ▶ *Problèmes multi-dimensionnels*  
quel choix de grilles décalées en 2D ?
- ▶ *Traitement des conditions aux limites*  
à faire dans le cas Boltzmann
- ▶ *Inversion de l'opérateur de collision*  
inversion rapide du linéarisé ?
- ▶ *Analyse mathématique*  
stabilité uniforme par rapport à  $\varepsilon$  pour le linéaire (cf [Klar-Unterreiter (02)])
- ▶ *Autres asymptotiques*  
Navier-Stokes incompressible, SHE, diffusion par le bord