Prépa-agreg 2019-2020 Université de Bordeaux

Composition

18 novembre 2019
durée 2h

Exercice 1. (droite des moindres carrés).

On considère n points du plan $(a_i, b_i), 1 \leq i \leq n$. On suppose qu'il existe $i \neq j$ avec $a_i \neq a_j$.

La droite des moindres carrés est la droite $y = \alpha x + \beta$ qui minimise:

$$f : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \to \sum_{i=1}^{n} (b_i - (\alpha a_i + \beta))^2.$$

1) Montrer que f admet un unique point critique (α_0, β_0) solution du système linéaire:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^n a_i^2 \, \alpha & + & \sum_{i=1}^n a_i \, \beta & = & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i \, \alpha & + & n \, \beta & = & \sum_{i=1}^n a_i \end{array} \right.$$

2) Calculer la matrice Hessienne de f et montrer que ce point critique est un minimum local.

3) On dit qu'une fonction g est coercive si $\lim_{\|x\| \to +\infty} g(x) = +\infty$. Montrer qu'une fonction coercive et continue sur $\mathbb{R}^2$ admet et atteint son minimum.

4) En déduire que (α_0, β_0) est l'unique minimum global de f.

Exercice 2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1) Soit $a \in I$. Donner le polynôme $T_{n,f,a}$ de Taylor à l'ordre n en a.

2) On suppose dans cette question, pour tout $n \geq 0$, on a $K_n := \sup_{x \in I} |f^{(n)}(x)| < \infty$. Montrer que pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - T_{n,f,a}(x)| \leq \frac{K_{n+1}}{(n+1)!} |x - a|^{(n+1)}.$$

3) On suppose dans cette question que f possède la propriété suivante : pour tout point $a \in I$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et des constantes $M, R < \infty$ tels que $[a - \varepsilon; a + \varepsilon] \subset I$ et

$$\forall x \in [a - \varepsilon; a + \varepsilon] \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{|f^n(x)|}{n!} \leq M \, R^n \, .$$

Montrer que f est développable en série entière au voisinage de chaque point de I.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $||f(x) - f(y)|| \geq C||x - y||$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.
1) Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\|Df(x) \cdot v\| \geq C\|v\|$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ est inversible.
3) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
4) Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que $f(x,y) = o(x,y)$ pour (x,y) proche de $(0,0)$. En déduire que f est différentiabe en $(0,0)$ et donner sa différentielle en $(0,0)$.

2) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,y) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} f(0,x)$$

existent et les calculer.

3) Calculer $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$. La fonction f est-elle 2 fois différentiable en $(0,0)$.