Prépa-agreg 2018-2019 Université de Bordeaux
10 octobre 2018

Composition : Calcul différentiel

Exercice 1. Soit
$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}.$$

1) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$.
3) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
Indication: On pourra poser $x_N = \frac{\pi}{2^N}$ et estimer $f(x_N)$.

Exercice 2. Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que g est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a
$$g((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y).$$

1) On suppose g différentiable sur $\mathbb{R}^n$, montrer que si g est convexe alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a
$$g(y) \geq g(x) + Dg_{(x)}(y-x).$$
(*Remarque*: la réciproque est vraie (bonus).)
2) En déduire que tout minimum local de g est global.

Exercice 3. On considère $E = M_n(\mathbb{R})$ et l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
On rappelle que le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice.
1) Pour $1 \leq i, j \leq n$ où $t \in \mathbb{R}$ on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire n'ayant que des 0 sauf un 1 à la place (i,j).
Calculer $\det(Id + tE_{i,j})$. En déduire l'existence des dérivées dans les directions $E_{i,j}$ de la fonction determinant en l'identité.
2) En déduire que pour $H \in M_n(\mathbb{R})$
$$D\det_{Id}(H) = \mathrm{trace}(H).$$
3) Soit X une matrice inversible en déduire que pour $H \in M_n(\mathbb{R})$
$$D\det_X(H) = \mathrm{trace}(\det(X)X^{-1}H).$$

Exercice 4.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. On note $\bar{\Omega}$ sa fermeture et $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$.

On considère le Laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$.

1) Montrer que f atteint son maximum.

2) On suppose que pour tout $x \in \Omega$, $\Delta f(x) > 0$. Montrer que f ne peut pas atteindre son maximum en un point $x_0 \in \Omega$.

3) On suppose maintenant que pour tout $x \in \Omega$, $\Delta f(x) \geq 0$. Montrer que

$$\sup_{x\in\Omega} f(x) \leq \max_{x\in\partial\Omega} f(x).$$

On pourra considérer $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2$ avec $\varepsilon > 0$.

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, $a < b$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$P_\varepsilon(x) = (x-a)(x-b) + \varepsilon x^3 .$$

1) Montrer que si ε est assez petit, alors P_ε admet 3 racines réelles distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$.

2) Montrer que

$$x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) + x_3(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

3) Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer un développement asymptotique de $x_i(\varepsilon)$ de la forme $x_i(\varepsilon) = \frac{\alpha_i}{\varepsilon} + \beta_i + \gamma_i\varepsilon + o(\varepsilon)$ quand ε tend vers 0.

Indication: On pourra utiliser le théorème des fonctions implicites.