Prépa-agreg 2017-2018 Université de Bordeaux
18 septembre 2017

Compo 1

Exercice 1. On pose $u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ et on considère la série de fonctions $f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$.

0) Etudier les variations de la fonction $x \to \frac{x}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

1) Montrer que f est bien définie et continue sur $]-1,1[$.

2) Montrer que

$$f(x) \sim_{x\to 1^-} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Indication: On pourra, pour $x \in]0,1[$ fixé, utiliser une méthode de comparaison série-intégrale avec la fonction $\phi : t \to \frac{x^t}{1-x^t}$. On montrera également, pour $a > 0$, que

$$\int_a^{+\infty} \phi(t)dt = \frac{\ln(1-x^a)}{\ln x}, \text{ et que } \frac{1-x^a}{1-x} \to a \text{ quand } x \to 1^-.$$

3) Montrer que pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \sum_{l\geq 1} d(l)x^l$$

avec $d(l)$ le nombre de diviseurs de l.

Indication: On pourra écrire $\frac{1}{1-x^n}$ comme la somme d'une série géométrique.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ avec $u_n = a_n b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

Pour $n \geq 1$, on note $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et on pose $A_0 = 0$.

1) On suppose qu' il existe M tel que que pour tout $n \geq 1$,

$$|A_n| \leq M\sqrt{n}$$

et que

$$\sum_{n\geq 2} |b_n - b_{n-1}|\sqrt{n} < +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} b_n = 0.$$

Montrer que $\sum u_n$ converge.

2) Le but de cette question est de montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ converge.

a) Montrer que pour $p \geq 1$ *impair*,

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{[\sqrt{n}]} = 2.$$

b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ ($C = 8$ convient), tel que pour tout $N \geq 1$,

$$\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{[\sqrt{n}]}\right| \leq C\sqrt{N};$$

c) Conclure.

3) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} z^n$ converge pour tout $|z| = 1$.

Exercice 3. Soit $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$. On suppose que $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ sont deux séries entières de rayon de convergence ≥ 1. On suppose que la série $\sum_n b_n$ diverge.

1) On suppose ici que $b_n > 0$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n\geq 1} a_n x^n}{\sum_{n\geq 1} b_n x^n} = l.$$

Indication: On pourra comencer par montrer que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda \in]0, 1[, \forall x \in]\lambda, 1[, \left|\sum_{n\geq 1}(a_n - lb_n)x^n\right| \leq 2\varepsilon \left(\sum_{n\geq 1} b_n x^n\right).$$

2) On pose maintenant, pour $n \geq 1$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. On suppose maintenant que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = l.$$

Montrer que le résultat de 1) est encore vrai.

Indication: On pourra remarquer que pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n\geq 0} A_n x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right) \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

3) En déduire que pour $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$,

$$\sum_{n\geq 0} x^{a^n} \sim_{x\to 1^-} \frac{-\ln(1-x)}{\ln a}.$$