Corrigé Composition 1

<u>Ex 1</u> : Soit $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1) $\sum_{n\geq 1} \left\| \frac{\sin(2^n x)}{2^n} \right\|_\infty = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} < +\infty$

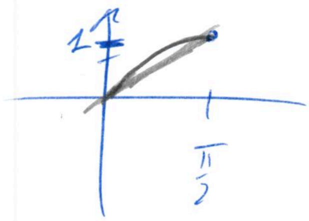
La série converge <u>normalement</u> sur $\mathbb{R}$, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, les fonctions $x \mapsto \sin(2^n x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$
donc f est bien continue.

2) On a : $(\sin x)'' = -\sin x \leq 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin x$ est donc concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

donc $\sin x$ est au dessus de ses cordes.

donc $\sin x \geq \frac{\pi}{2} x$. sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.



3) On pose $x_N = \frac{\pi}{2^N}$.

. si $n \geq N$, $\sin\left(2^n \frac{\pi}{2^N}\right) = \sin\left(2^{n-N}\pi\right)$
$= \sin(k\pi) \quad k \in \mathbb{N}$
$= 0$

. si $1 \leq n \leq N-1$, $0 \leq 2^n \frac{\pi}{2^N} \leq \frac{\pi}{2}$

donc $\sin(2^n x^N) \geq \frac{2}{\pi}(2^n x_N)$.

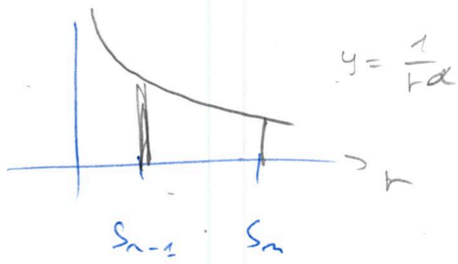
Donc $f(x_N) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin(2^n x_N)}{2^n} \geq \frac{2}{\pi} x_N \times (N-1)$

On a que $f(0)=0$

Donc $\dfrac{f(x_N)-f(0)}{x_N-0} = \dfrac{f(x_N)}{x_N} \geq \dfrac{2}{\pi}(N-1)$

Or $x_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ donc $\limsup\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

et f n'est pas dérivable en 0.



__Ex 2 :__ 1) $\alpha>0$ donc

$t \to \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ est croissante. ~~On pose $S_0=0$~~

donc $\displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \geq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^\alpha}\,dt = \frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$, $n\geq 2$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \int_{S_1}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha}\,dt + \frac{u_1}{S_1^\alpha} \leq \int_{S_1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt + \frac{u_1}{S_1^\alpha}$

(On a supposé que $u_1>0$)

$< +\infty$

si $\alpha>1$.

donc la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{u_k}{S_k^\alpha}$ converge si $\alpha>1$.

2) Soit $q \geq p+1$.

on a : $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} \frac{u_k}{S_k} \geq \sum_{k=p+1}^{q} \frac{u_k}{S_q}$ car (S_n) est croissante

$$= \frac{S_q-S_p}{S_q} = 1-\frac{S_p}{S_q}.$$

Posons $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k}$.

Soit $p \geq 1$, $S_n \nearrow +\infty$ donc $\exists N$, si $n \geq N$, $S_n \geq 2S_p$.

prenons $q = N$, on a $T_q - T_p = 1 - \frac{S_p}{S_q} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

donc la suite $(T_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

donc elle diverge. $\left(T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \right)$

- Si $0 < \alpha < 1$. $\frac{u_k}{S_k^\alpha} \geq \frac{u_k}{S_k} \geq 0$

donc la série $\sum \frac{u_k}{S_k^\alpha}$ diverge aussi.

Ex 3 : Soit $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\begin{cases} v_0 = x \\ v_{n+1} = \sin(v_n) \text{ si } n \geq 0. \end{cases}$

1) $\sin([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.

. On montre par récurrence élémentaire que $v_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour $n \geq 0$.

On a l'inégalité $\sin x \leq x$ sur $\mathbb{R}_+$.

donc $v_{n+1} \leq v_n$.

La suite (v_n) est donc décroissante minorée donc converge.

La limite est un point fixe de la fonction sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(~~car~~ sinus est continue).

donc $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Puisque $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

On a
$$v_{n+1}^\alpha = \sin(v_n)^\alpha$$
$$= \left(v_n - \frac{v_n^3}{3!} + o(v_n^3) \right)^\alpha$$
$$= v_n^\alpha \left(1 - \frac{v_n^2}{3!} + o(v_n^2) \right)^\alpha$$

$$= v_n^{\alpha}\left(1 - \alpha\frac{v_n^2}{3!} + o(v_n^2)\right)$$

$$= v_n^{\alpha} - \alpha\frac{v_n^{2+\alpha}}{6} + o(v_n^{2+\alpha})$$

Donc $v_{n+1}^{\alpha} - v_n^{\alpha} = -\frac{\alpha}{6} v_n^{\alpha+2} + o(v_n^{2+\alpha})$

i.e. $v_{n+1}^{\alpha} - v_n^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{6} v_n^{\alpha+2}$.

3) En particulier pour $\alpha = -2$,

$$v_{n+1}^{-2} - v_n^{-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}.$$

La série de terme général $a_n = \frac{1}{3}$ diverge et est de signe constant.

Donc les sommes partielles ci-dessous sont équivalentes :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(v_{k+1}^{-2} - v_k^{-2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3} \sim \frac{n}{3}.$$

La première série telescopique vaut : $v_n^{-2} - v_0^{-2}$

donc $v_n^{-2} \sim \frac{n}{3}$

4) donc $v_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

On en déduit que la série $\sum v_n$ diverge.

5) Pour chaque $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n v_n(x)$

est une série alternée, (donc converge).

De plus, on peut majorer le reste par :

$$\left|\sum_{n\geqslant p} (-1)^n v_n(x)\right| \leqslant v_p(x) \leqslant v_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

d'où la convergence uniforme de la série

(La majoration $v_n(x) \leq v_n(\frac{\pi}{2})$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ découle de la croissance de sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$).

Ex 4

1) La suite $(a_n)_n$ converge donc est bornée par $M \geq 0$

soit $\rho > 0$, $\frac{|a_n| \rho^n}{n!} \leq \frac{M \rho^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

donc la suite $\frac{|a_n| \rho^n}{n!}$ est bornée.

donc le rayon de convergence qui vaut :

$\sup \{ \rho > 0, \left(\frac{|a_n| \rho^n}{n!}\right)_n$ est bornée $\} = +\infty$.

2) Montrons que : $e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

soit $\varepsilon > 0$, $\exists N$, si $n \geq N$, $|a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\left| \left(e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n \right) - \ell \right| = \left| e^{-x} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(a_n - \ell) x^n}{n!} \right) \right|$$

$$\leq e^{-x} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|a_n - \ell|}{n!} x^n + e^{-x} \sum_{n \geq N} \underbrace{|a_n - \ell|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \frac{x^n}{n!}$$

$$\leq e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{|a_n - \ell| x^n}{n!} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \cancel{e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}}$$

Posons $P_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|a_n - \ell|}{n!} x^n$

P_N est un polynôme. Par croissance comparée :

$$e^{-x} P_N(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

donc $\exists A \geq 0$ tel que si $x \geq A$, $\left|e^{-x} P_N(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

donc si $n \geq N$ et si $x \geq A$

$$\left| \left(e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n \right) - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

donc $e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.