Prépa-agreg 2018-2019 Université de Bordeaux
17 septembre 2018

Composition 1

Exercice 1. Donner la nature de la série suivant la valeur de $\alpha > 0$

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

Exercice 2. Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{[\log n]}}{n}$$

diverge. ($[\cdot]$ désigne la partie enièr et $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.) *Indication:* On pourra montrer que le critère de Cauchy n'est pas satsifait.

Exercice 3. Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$$

n'est pas absolument convergente. *Indication:* On pourra commencer par montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $|\sin(x)| + |\sin(x+1)| \geq c$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{N}$, et soit $f : [a; \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive décroissante.

1) Montrer que si $\sum f(n)$ est convergente et si $f(x) = o\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)$ quand $x \to \infty$, alors $R_n := \sum_{k>n} f(k)$ est équivalent à $\int_n^\infty f(t)\,dt$.

2) Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha}, \text{ pour } \alpha > 1.$$

Exercice 5. Dans tout l'exercice, (a_n) est une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0. Le but de l'exerice est de montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n \sin(nt)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a_n = o(\frac{1}{n})$.

0) Soit $t \in]0;\pi]$, montrer que, pour $n \geq 1, p \geq 0$,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} \sin(kt)\right| \leq \frac{1}{\sin(t/2)}.$$

1) En déduire que pour tout $t \in]0,\pi]$,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k \sin(kt)\right| \leq \frac{a_n}{\sin(t/2)}.$$

2) Montrer que la série $\sum a_n \sin(nt)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur tout intervalle $[\alpha; 2\pi - \alpha]$, $0 < \alpha < \pi$.

3) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $R_n(t) = \sum_{k>n} a_k \sin(kt)$.
Montrer que, pour tout $t \in]0;\pi]$ et pour tout n, on a

$$|R_n(t)| \leq \frac{a_{n+1}}{\sin(t/2)} \leq \frac{2\pi a_{n+1}}{t};$$

puis que si $t \in]0;\pi]$ et $n, p \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} |R_n(t)| &\leq tp \sup_{k \geq n} k a_k + \frac{2\pi a_{n+p}}{t} \\ &\leq tp \sup_{k \geq n} k a_k + \frac{2\pi (n+p) a_{n+p}}{tp}. \end{aligned}$$

4) On suppose $a_n = o(\frac{1}{n})$. Montrer que la série $\sum a_n \sin(nt)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

5) **Bonus**: Montrer la réciproque.