Composition 1 (Corrigé)

Ex 1 (Lemme de Kronecker)

1) Césaro généralisé :

Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante, $b_n \nearrow +\infty$ et $b_0=0$

Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Soit $\epsilon>0$, $\exists N_1$ tel que si $n\geq N_1$ $|s_n-\ell|\leq \frac{\epsilon}{2}$.

Soit $n\geq N_1$

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k-1})s_k-\ell\right| = \left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k-1})(s_k-\ell)\right|$$

$$\leq \frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{N_1-1}(b_k-b_{k-1})|s_k-\ell|\right)+\underbrace{\frac{1}{b_n}\sum_{k=N_1}^{n}(b_k-b_{k-1})|s_k-\ell|}_{\leq \frac{(b_n-b_{N_1-1})}{b_n}\frac{\epsilon}{2}\leq\frac{\epsilon}{2}}.$$

N_1 est fixé, $b_n\longrightarrow+\infty$.

$\exists N_2$ tel que $\frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{N_1-1}(b_k-b_{k-1})|s_k-\ell|\right)\leq\frac{\epsilon}{2}$.

(On peut prendre $N_2 \geq \dfrac{2\sum_{k=1}^{N_1-1}(b_k-b_{k-1})|s_k-\ell|}{\epsilon}$)

si $n\geq \max(N_1,N_2)$

on a $\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k-1})s_k-\ell\right|\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$.

donc $$\boxed{\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k-1})s_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell}$$

2) Effectuons une transformation d'Abel : posons $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, $S_0=0$

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}b_k u_k=\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}b_k(S_k-S_{k-1})$$

$$= \frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n} b_k S_{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=\cancel{0}1}^{n-1} b_{k+1} S_k\right) =$$

$$= \frac{1}{b_n}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) S_k + b_n S_n\right)$$

$$= -\frac{1}{b_n}\left(\sum_{j=2}^{n} (b_j - b_{j-1}) S_{j-1}\right) + S_n$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{b_n}\left(\sum_{j=1}^{n} (b_j - b_{j-1}) S_{j-1}\right)}_{\substack{\to -\ell \text{ par 1)} \\ (\text{car } S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell)}} + \underbrace{S_n}_{\substack{\downarrow \\ \ell \text{ (par hypothèse)}}} \qquad (S_0 = 0)$$

donc $\boxed{\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

3) Supposons $\sum \frac{x_n}{n}$ converge.

posons $b_n = n$, $b_k - b_{k-1} = 1$, $k \geq 1$ et $u_k = \frac{x_k}{k}$, $k \geq 1$

D'après 2:

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \frac{x_k}{k} = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

d'après 2)

Ex 2 : (Un premier pas vers Stirling)

1) Posons $u_n = \dfrac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}}$, $n \geq 1$

On a : $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}} \cdot \dfrac{(n-1)^{n-3/2}}{(n-1)!\, e^{n-1}} = e\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}$

(Rq : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$, donc $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$)

Soit $v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$

$= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Pour x proche de 0, on a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$

donc $v_n = 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$= \cancel{1} + \left(\cancel{-1} - \cancel{\frac{1}{2n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$+ \cancel{\frac{1}{2n}}$

$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

c'est à dire : $|v_n| \leq \dfrac{C'}{n^2}$ pour un certain $C'>0$.

La série $\sum v_n$ est donc absolument convergente, donc convergente.

2) On a : $\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} \ln(u_k) - \ln(u_{k-1}) + \ln(u_1)$

$= \sum_{k=2}^{n} v_k + \ln u_1$.

donc $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Par continuité de exp, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell} = C > 0$

c'est-à-dire : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

Ex 3 : Série de Hardy :

1) $$\left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Si $\alpha > 1$, c'est le terme général d'une série absolument convergente. Donc $\sum \frac{\sin \pi(\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

2). On peut utiliser directement que si $\int_1^{+\infty} |f'(t)|dt < +\infty$ Alors $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

- On peut aussi remonter directement ce résultat :

posons $v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha} dx$.

On a : $$|v_n - u_n| = \left|\int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha} - \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} dx\right|$$
$$\leq \int_n^{n+1} \left|\frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha} - \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right| dx$$

Or $$\left(\frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha}\right)' = \frac{\pi}{2}\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{x^{\alpha+1/2}} - \frac{\alpha\sin(\pi\sqrt{x})}{x^{\alpha+1}}.$$

donc $$\left|\left(\frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha}\right)'\right| \leq \frac{C}{x^{\alpha+1/2}}, \quad x \geq 1.$$

Donc $$|v_n - u_n| \leq \frac{C}{n^{\alpha+1/2}}.$$

- Puisque : $\alpha > \frac{1}{2}$, la série $\sum (v_n - u_n)$ converge (absolument).

- Montrons que $\sum v_n$ converge.

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \int_1^n \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha} dx$$

$u = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = u^2$
$dx = 2u\,du$

$$= \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin(\pi u)}{u^{2\alpha-1}} du$$

$$\underset{(IPP)}{=} \left[-\frac{\cos(\pi u)}{\pi\, u^{2\alpha-1}}\right]_1^{\sqrt{n}} - \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{(2\alpha-1)}{\pi} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}} du\right)$$

$\alpha > \frac{1}{2}$ donc $\sum_{n=1}^{n-1} v_n$ converge.

$\sum (u_n - v_n)$ et $\sum v_n$ converge

donc $\sum u_n$ converge.

3) $e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$

$= \left(e^{i\pi\sqrt{n}}\right)\left(e^{i\pi\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} - 1\right)$

- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$

Or pour x proche de 0:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\cancel{1} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \cancel{-1}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

- $\left(e^{i\pi\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} - 1\right) = \exp\left(\frac{i\pi}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) - 1$

pour z proche de 0:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + O(z^3)$$

$$e^{i\pi\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} - 1 = \frac{i\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

d'où: $\boxed{e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}} = \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2}{8n} e^{i\pi\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}$

car $\left|e^{i\pi\sqrt{n}}\right| = 1$

4) En prenant la partie réelle :

$$\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right) - \frac{\pi^2}{8}\frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

- $\sum \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ converge (analogue à $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n}$.)
- $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge
- $\sum \left(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})\right)$ diverge

donc $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ diverge $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$

5) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

Supposons par l'absurde que $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

alors écrivons $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}}_{=a_n} \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}}_{=\varepsilon_n}$

- Avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on a $\underline{|S_n| \leq M}$ (car S_n converge)

  et $\varepsilon_n \geq 0$, $\underline{\text{décroissante}}$, $\underline{\varepsilon_n \searrow 0}$.

- Notons $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$.

  En effectuant une transformation d'Abel, montrons que $(T_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Soit $\underline{q \geq p}$.

$$T_q - T_p = \sum_{k=p+1}^{q} a_k\,\varepsilon_k$$

$$= \sum_{k=p+1}^{q} (S_k - S_{k-1})\,\varepsilon_k$$

$$= -S_p\,\varepsilon_{p+1} + \sum_{k=p+1}^{q-1} S_k\,(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + S_q\,\varepsilon_q$$

Donc $|T_q - T_p| \leq M\, \varepsilon_{p+1} + M\, \varepsilon_{p+1}$

$$= 2M\,\varepsilon_{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

donc $(T_n)_n$ est de Cauchy et converge

<u>contradiction</u>.

Donc pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge.

(Rq : On aurait pu être plus précis dans les majorations en introduisant $S_{n,p} = \sum_{k=p+1}^{n} a_k \quad n \geq p$)