Prépa-agreg 2015-2016 Université de Bordeaux

Composition 6

12 octobre 2015
durée 2h

Exercice 1.
A) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + (1-x)^3y^2$. Montrer que f admet un unique extremum local. Est-il global?

B) Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f n'est pas minorée, mais qu'elle admet un minimum local.

On suppose que $d = 1$. Montrer que f' s'annule au moins 2 fois.

Qu'en est-il pour $d = 2$?

Exercice 2. Soient $a > 0, b > 0$. Montrer qu'il existe un unique rectangle (à côtés parallèles aux axes de coordonnées) d'aire maximale inscrit dans l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Déterminer les dimensions de ce rectangle.

On pourra paramétrer le rectangle par son coin superieur droit (x, y).

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue,. On considère l'équation différentielle $(E) : \ y' = f(y)$. On suppose qu'il existe une solution bornée ϕ de (E). Montrer qu'il existe t_0 tel que $f(t_0) = 0$.

Indication: On pourra raisonner par l'absurde et considérer par exemple que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On s'intéressera alors au comportement de ϕ en $+\infty$.

Exercice 4.
A)1) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0.

2) Proposer une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont les zéros ne sont pas isolés.

B) Soit z une solution non identiquement nulle de l'équation $y^{(5)}(t) + t^2y^3(t) = 0$. Montrer que les zéros de z sont isolés (c'est-à-dire montrer que si $z(t_0) = 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que z ne s'annule pas sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$).

Exercice 5. On considère l'équation différentielle de Riccati sur $[0, +\infty)$ $(E_0) :\ y'(t) = y^2(t) + \alpha(t)$ où α est une fonction continue de $[0, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que z_0 est une solution définie globalement sur $[0, +\infty)$ et qu'elle est positive: $z_0(t) > 0$, pour $t \geq 0$.

Soit $\beta : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ une fonction continue.

1) On considère l'équation différentielle $(E_1) :\ y'(t) = y^2(t) + \alpha(t) + \beta(t)$. Soit z_1 la solution maximale de (E_1) vérifiant $z_1(0) = z(0)$. Elle est définie sur un intervalle $[0, b[$. Montrer que $z_1(t) \geq z_0(t)$ pour $t \in [0, b[$. En déduire que la solution maximale z_1 n'est pas globale.

2) On considère l'équation différentielle $(E_2) :\ y'(t) = y^2(t) + \alpha(t) - \beta(t)$. Soit z_2 la solution maximale de (E_2) vérifiant $z_2(0) = z(0)$. Montrer que z_2 s'annule.