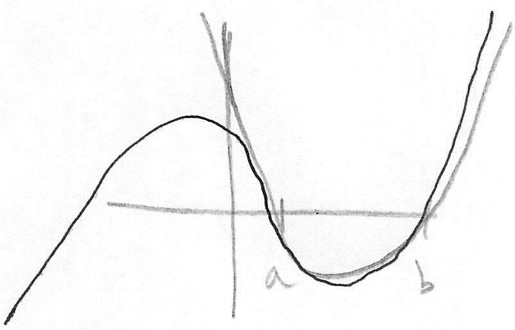
Exercice 5 (Rouvière ex 79)

$$P_\varepsilon(x) = (x-a)(x-b) + \varepsilon x^3.$$

$$a < b.$$



1) $P_\varepsilon(a-1)$

$$= \underbrace{(b-a)}_{>0} + \varepsilon(a-1)^3$$

$P_\varepsilon\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$= \underbrace{-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}_{<0} + \varepsilon(a+b)^3$$

donc pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

$$P_\varepsilon(a-1) > 0$$

$$P_\varepsilon\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

Or $P_\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ et $a - 1 < a < \frac{a+b}{2}$

$P_\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Par le théorème des valeurs intermédiaires P_ε admet au moins 3 racines réelle (et donc 3 racines réelles).

notées $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$.

2) En développant P_ε (relation coefficients racines) on trouve que : $x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) + x_3(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}$.

3) On s'attend à avoir : $x_2(\varepsilon)$ proche de a

$x_3(\varepsilon)$ proche de b

et $x_1(\varepsilon)$ obtenu par la relation ci-dessus.

Posons $f(\varepsilon, x) = P_\varepsilon(x) = (x-a)(x-b) + \varepsilon x^3$.

On cherche à résoudre $f(\varepsilon, x) = 0$. (*) (f $\mathcal{C}^\infty$)

La dérivée partielle par rapport à la 2de variable vaut :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\varepsilon, x) = 2x - (a+b) + 3\varepsilon x^2.$$

(*) On va utiliser le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(\varepsilon = 0, x = a)$ et $(\varepsilon = 0, x = b)$

De plus, on a : $\begin{cases} f(0,a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,a) = (b-a) \neq 0. \end{cases}$

Par le théorème des fonctions implicites :

Il existe donc un voisinage V_2 de 0

et un voisinage W_2 de a

et une fonction φ_2 telle que : (φ_2 $\mathcal{C}^\infty$)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \in V_2 \text{ et } x \in W_2 \\ \text{et } f(\varepsilon, x) = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\varepsilon \in V_1 \text{ et } x = \varphi_2(\varepsilon)).$$

On peut faire de même au voisinage de $(0,b)$

$\exists$ V_3 voisinage de 0

W_3 ——— b

et $\varphi_3 : V_3 \to W_3$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon \in V_3 \text{ et } x \in W_3 \\ \text{et } f(\varepsilon, x) = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\varepsilon \in V_2 \text{ et } x = \varphi_3(\varepsilon) \right).$$

Pour ϵ suffisamment petit, on aura en fait :

$$\begin{cases} \varphi_2(\epsilon) = x_2(\epsilon) \\ \varphi_3(\epsilon) = x_3(\epsilon). \end{cases}$$

Maintenant, $\varepsilon \in V_2$, $f(\epsilon, x_2(\epsilon)) = 0 = (x_2(\epsilon) - a)(x_2(\epsilon) - b) + \epsilon (x_2(\epsilon))^3$

d'où en dérivant en ϵ :

$$\left(\left(2 x_2(\epsilon) - (a+b)\right) + 3 \epsilon\, x_2(\epsilon)^2 \right) \frac{dx_2}{d\epsilon}(\epsilon) + (x_2(\epsilon))^3 = 0.$$

Or $x_2(0) = a$

d'où en $\varepsilon = 0$: $(a-b)\, x_2'(0) = -a^3$.

i.e. : $x_2'(0) = + \dfrac{a^3}{b-a}$.

Et $$\boxed{x_2(\epsilon) = a + \frac{a^3}{(b-a)} \epsilon + O(\epsilon^2).}$$

(par la formule de Taylor en $\epsilon = 0$).

De même : $f(\epsilon, x_3(\epsilon)) = 0$

et $x_3(0) = b$

d'où : $(b-a)\, x_3'(0) = -b^3$

$$x_3'(0) = \frac{-b^3}{b-a}$$

et $$\boxed{x_3(\epsilon) = b - \frac{b^3}{b-a}\epsilon + O(\epsilon^2)}.$$

Finalement $x_1(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} - x_2(\epsilon) - x_3(\epsilon)$

$$= -\frac{1}{\epsilon} - (a+b) + \frac{(b^3-a^3)}{b-a}\epsilon + O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$$

$$\boxed{x_1(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} - (a+b) + (a^2+ab+b^2)\epsilon + O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)}.$$