Exercice 4 : (principe du maximum faible)
(Zinly Guelfdec, Gouda, Nouvière).

1) $\bar{\Omega}$ est fermé borné dans $\mathbb{R}^d$ donc compact.
f est continue donc atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$.

2) On suppose que : $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$.

On suppose par l'absurde que f atteint son maximum en $x_0 \in \Omega$.

On a donc : $Df_{(x_0)} = 0$ et $D^2 f_{(x_0)} \geq 0$.

c'est-à-dire $\mathrm{Hess} f(x_0)$ est une matrice symétrique négative : $({}^t h . \mathrm{Hess} f_{(x_0)} . h \leq 0) \; \forall h \in \mathbb{R}^d$.

Ses valeurs propres sont donc ≤ 0.

Or $\Delta f(x) = \mathrm{trace}\,(\mathrm{Hess} f(x))$

donc $\Delta f(x_0) \leq 0$. contradiction.

3. On suppose maintenant que : $\Delta f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$.

On a $\Delta f_\varepsilon(x) = \Delta f(x) + 2\varepsilon d > 0$

donc $\Delta f_\varepsilon(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$.

f_ε atteint donc son maximum sur le bord ;
en un point $x_\varepsilon \in \partial\Omega$.

d'où pour $x \in \Omega$,

$$f(x) \leq f(x) + \varepsilon \|x\|^2 = f_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon(x_\varepsilon)$$
$$= f(x_\varepsilon) + \varepsilon \|x_\varepsilon\|^2.$$

et $f(x) \leq \left(\max_{z \in \partial\Omega} f(z)\right) + \varepsilon M$

car $\bar{\Omega}$ est borné.

$\varepsilon \to 0$ donne : $f(x) \leq \max_{z \in \partial\Omega} f(z)$.

On prend maintenant le sup pour $x \in \Omega$ et :

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) \leq \max_{z \in \partial\Omega} f(z).$$