Agreg 2015/2016

Composition 3 (Corrigé)

Ex 1 :

1) Si $(x,y)\neq(0,0)$, on a

$$|f(x,y)| \leq |x|$$

donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$.

Donc f est continue en 0.

2) On a $f(0,t)=f(t,0)=0$, $t\in\mathbb{R}$

donc les dérivées partielles existent et valent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Donc, si f était différentiable, sa différentielle serait nulle.

et par exemple on aurait :

$$f(t,t)=f(0,0)+t\, Df_0(1,1)+o(t)$$
$$=0+o(t)$$

On $f(t,t) = \frac{t}{2}$ n'est pas négligeable devant t.
quand $t \to 0$.

Donc f n'est pas différentiable en 0.

3) En dehors du point $(0,0)$, f est $\mathcal{C}^1$ (même $\mathcal{C}^\infty$)
par produit et quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
Donc f est différentiable au point $(1,0)$
Un calcul donne : $\partial_x f(1,0) = 0$
$\partial_y f(1,0) = 0$.

donc $Df_{(1,0)} = 0$.

Ex 2 : . $E = M_n(\mathbb{R})$.

1) Une base de $M_n(\mathbb{R})$ est formé des $(E_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

On a $\det(Id + tE_{ij}) = \begin{cases} 1+t & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

(En effet, $(Id + tE_{ij})$ est une matrice triangulaire)

Les dérivées partielles dans les direction E_{ij} existent et valent donc.

$$\frac{\partial}{\partial E_{ij}} \det(Id) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(1+t)-1}{t} = 1 & \text{si } i=j \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-1}{t} = 0 & \text{si } i\neq j. \end{cases}$$

2) D'après le rappel, det est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice donc est de classe $\underline{\underline{\mathcal{C}^1}}$ (et même $\mathcal{C}^\infty$).

On en déduit donc que det est différentiable à l'identité et que
$$D\det_{Id}(H) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial}{\partial E_{ij}} \det(Id) \times h_{ij}$$
$$= \sum_{1\leq i\leq n} h_{ii} = \operatorname{trace}(H)$$

avec $H = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij} E_{ij}$

3) Soit X une matrice inversible.

On a
$$\det(X+H) = \det(X(Id + X^{-1}H))$$
$$= \det(X)\det(Id + X^{-1}H)$$
$$= \det(X)\left(\det(Id) + D\det_{Id}(X^{-1}H) + o(\|X^{-1}H\|)\right)$$

d'après la définition de la différentielle de det en Id.

$$\det(X+H) = \det(X)\left(1 + \operatorname{tr}(X^{-1}H) + o(\|X^{-1}H\|)\right)$$

$$= \det X + \operatorname{tr}\left(\det(X)\, X^{-1} H\right) + \underbrace{o\left(\det(X)\, \|X^{-1}H\|\right)}_{= o(\|H\|)}$$

car on travaille à X fixé.

donc det est différentiable en X

et $D\det_X(H) = \operatorname{tr}\left(\det(X)\, X^{-1} H\right)$.

<u>Rq</u>: Si X inversible : $X^{-1} = \dfrac{1}{\det(X)}\, {}^t\overline{X}$ avec $\overline{X}$ comatrice de X

donc on peut écrire : $D\det_X(H) = \operatorname{tr}\left({}^t\overline{X}\, H\right)$.

Cette formule est aussi valable pour X non inversible.

On montre cela en utilisant que det est $\mathcal{C}^1$

donc que $D\det$ est continue en X

et en utilisant que les matrices inversibles forment

un ouvert <u>dense</u> de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 3 :

1) Supposons $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe.

Par définition on a : $\dfrac{f(z+\omega)-f(z)}{\omega} \xrightarrow[\substack{\omega \to 0 \\ \omega \in \mathbb{C} \\ \omega \neq 0}]{} \ell \in \mathbb{C}$.

c'est-à-dire $f(z+\omega) = f(z) + \ell\omega + o(\omega)$.

Soit encore, en écrivant $f = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ avec $P = \mathrm{Re}\, f$, $Q = \mathrm{Im}\, f$

$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\omega = \omega_1 + i\omega_2$, $\ell = \ell_1 + i\ell_2$
$z = (x+iy)$

$$P(x+h_1, y+h_2) = \mathrm{Re}\, f\big((x+iy)+(h_1+ih_2)\big)$$
$$= P(x,y) + \big(\ell_1 h_1 - \ell_2 h_2\big) + o\big(\|(h_1,h_2)\|\big)$$

et $Q(x+h_1, y+h_2) = Q(x,y) + \ell_2 h_1 + \ell_1 h_2 + o(\|(h_1,h_2)\|)$

Donc $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est différentiable

et $DF\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 & -\ell_2 \\ \ell_2 & \ell_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$.

2) Réciproquement si DF est différentiable de différentielle $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

on a : $P(x+h_1, y+h_2) = P(x,y) + a h_1 - b h_2 + o(\|(h_1,h_2)\|)$

et $Q(x+h_1, y+h_2) = Q(x,y) + b h_1 + a h_2 + o(\|(h_1,h_2)\|)$

d'où $f(z+\omega) = f(z) + (a+ib)(\omega_1 + i\omega_2) + o(\|\omega\|)$

et $\dfrac{f(z+\omega)-f(z)}{\omega} \xrightarrow[\omega \to 0]{} a+ib$ donc f est holomorphe en z.

Ex 4 : Soit P un polynôme non constant sur $\mathbb{C}$.

$A = \{z \in \mathbb{C},\ P'(z) = 0\}$. $B = P(A)$

$U = P(\mathbb{C}) - B$ $V = \mathbb{C} - B$.

A est fermé, donc A^c est ouvert.

(1) Soit $y \in U$, $\exists z \in$

Par hypothèse on a $P'(z) \neq 0$

donc la différentielle de $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est inversible.

(Si on préfère, on peut regarder $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
d'après l'exercice précédent)

D'après le théorème d'inversion locale,

il existe O_1 voisinage ouvert de z dans A^c
et O_2 voisinage ouvert de $y = P(z)$ dans U

tel que P est un difféomorphisme de O_1 sur O_2.

En particulier U est un ouvert de $\mathbb{C}$.

(2) On a $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $n \geq 1$.

donc $|P(z)| = |a_n| |z^n| \underbrace{\left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right|}_{\xrightarrow[|z| \to +\infty]{} 1}$

$\xrightarrow[|z| \to +\infty]{} +\infty$.

(3) Soit $y_n \in P(\mathbb{C})$ une suite convergente vers y.

$\exists z_n \in \mathbb{C}$ tel que $y_n = P(z_n)$.

La suite (z_n) est bornée car sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} |P(z_n)| = +\infty$ d'après la question précédente. Or la suite (y_n) converge donc est bornée.

On peut donc extraire une sous suite convergente (z_{n_k}) vers $z_\infty \in \mathbb{C}$.

Par continuité : $P(z_{n_k}) \to P(z_\infty)$

Or $P(z_{n_k}) \to y$ donc $y = P(z_\infty)$ par unicité de la limite.

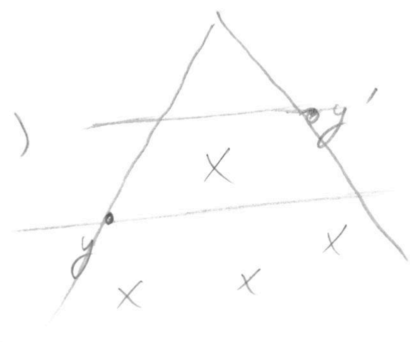
Donc $y \in P(\mathbb{C})$ et $P(\mathbb{C})$ est fermée.

(4) On a $U \subset V$ et U ouvert de $\mathbb{C}$.

donc $U = U \cap V$ est un ouvert de V.

On a $U = P(\mathbb{C}) \cap V$ et $P(\mathbb{C})$ fermé de $\mathbb{C}$.

donc U est un fermé de V.



(5) A est un ensemble fini (possiblement vide)

donc $B = P(A)$ est aussi un ensemble fini.

donc $V = \mathbb{C} \setminus B$ est un ensemble connexe

(Il est en fait connexe par arcs : pour tout $y \in \mathbb{C} \setminus B$, il existe au moins 2 droites différentes passant par y ne rencontrant pas B.)

U est ouvert et fermé de V et V connexe

Donc $U = \emptyset$ ou V donc $U = V$.

donc $P(\mathbb{C}) \setminus B = \mathbb{C} \setminus B$. et $B = P(A)$

donc $P(\mathbb{C}) = (P(\mathbb{C}) \setminus P(A)) \cup P(A)$
$= (\mathbb{C} \setminus P(A)) \cup P(A) = \mathbb{C}$.

En particulier 0 a un antécédent par P : $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$.