Rapport scientifique présenté à

l'Université de Bordeaux

par

Michel Bonnefont

pour obtenir

L'habilitation à diriger les recherches

Quelques contributions à l'étude d'inégalités fonctionnelles pour des opérateurs sous-elliptiques, elliptiques et discrets

Soutenue le 28 novembre 2019

Après l'avis des rapporteurs

Dario Cordero-Erausquin	Professeur, Université Pierre et Marie Curie
Arnaud Guillin	Professeur, Université de Clermont-Auvergne
Anton Thalmaier	Professeur, Université du Luxembourg

Devant la commission d'examen formée de

Dario Cordero-Erausquin	Professeur, Université Pierre et Marie Curie
Nathael Gozlan	Professeur, Université Paris-Descartes
Arnaud Guillin	Professeur, Université de Clermont-Auvergne
Frédéric Hérau	Professeur, Université de Nantes
Michel Ledoux	Professeur, Université deToulouse 3
El Maati Ouhabaz	Professeur, Université de Bordeaux
Anton Thalmaier	Professeur, Université du Luxembourg

Table des matières

1 Introduction

Dans cette introduction, je présente sommairement mes travaux de recherche et les articles réalisés.

1.1 Diffusions sous elliptiques et critère de courbure-dimension

Une première partie de mon travail de recherche consiste à étudier des diffusions sous-elliptiques. Les articles ci-dessous sont principalement attachés à l'étude d'un critère de courbure dimension généralisé en géométrie sous elliptique.

0. *Functional inequalities for subelliptic heat kernels.* PHD thesis. Archive Hal.
1. *On gradient bounds for the heat kernel on the Heisenberg group.* Journal of Functional Analysis. 255 (2008), no. 8, 1905–1938. (Avec *D. Bakry, F. Baudoin, D. Chafaï*).
2. *The subelliptic heat kernel on SU(2) : Representations, Asymptotics and Gradient bounds.* Mathematische Zeitschritt. 263 (2009), no. 3, 647–672. (Avec *F. Baudoin*).
3. *Subelliptic Li-Yau estimates on three dimensional model spaces.* Potential theory and stochastics in Albac, 1–10, Theta Ser. Adv. Math., 11, Theta, Bucharest, 2009. (Avec *D. Bakry, F. Baudoin, B.Qian*).
4. *The subelliptic heat kernel on SL(2,R) and on its universal covering : integral representations and some functional inequalities.* Potential analysis. 36 (2012), no. 2, 275–300.
5. *Log-Sobolev inequalities for subelliptic operators satisfying a generalized curvature dimension inequality.* Journal of Functional Analysis. 262 (2012), no. 6, 2646–2676. (Avec *F. Baudoin*)
6. *Subriemannian balls in CR Sasakian manifolds.* Proceedings of the American Mathematical Society. 141 (2013), no. 11, 3919–3924. (Avec *F. Baudoin*).
7. *A sub-Riemannian curvature-dimension inequality, volume doubling property and the Poincaré inequality.* Mathematische Annalen 358 (2014), no. 3-4, 833–860. (Avec *F. Baudoin, N. Garofalo*).
8. *Volume and distance comparison theorems for sub-Riemannian manifolds.* J. Funct. Anal. 267 (2014), no. 7, 2005–2027. (Avec F. Baudoin N. Garofalo, I. Munive).
9. *Curvature-dimension estimates for the Laplace-Beltrami operator of a totally geodesic foliation.* Nonlinear Anal. 126 (2015), 159–169. (Avec F. Baudoin).

10. *Convergence to equilibrium for hypoelliptic Ornstein-Uhlenbeck type operators.* Arxiv preprint. (Avec *F. Baudoin, L. Chen*).

Les travaux [1,2,3,4] font partie de mon travail de thèse [0]. Je les inclue ici pour mieux présenter mes travaux de recherche suivants. Dans le travail [1], nous étudions le semi-groupe de la chaleur associé au sous Laplacien canonique sur le groupe de la chaleur. Nous redémontrons notamment l'inégalité de H.Q. Li :

$$|\nabla P_t f| \leq C P_t |\nabla f|.$$

Dans les travaux [2,3], nous avons étudié et donné des représentations du noyau de la chaleur sur d'autres espaces modèles sous elliptiques que sont le groupe $SU(2, \mathbb{R})$ et le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$. Ces espaces correspondent à des espaces modèles de courbure constante en géométrie sous elliptique.

Le travail [4] propose un critère de courbure dimension généralisé pour ces trois espaces modèles. Ce critère sera alors plus formellement introduit et systématiquement étudié par F. Baudoin et N. Garofalo [BG17a]. Les travaux suivants portent principalement sur les conséquences du critère de courbure dimension.

Dans l'article [5], on établit alors des inégalités de Poincaré et de log-Sobolev (modifiées) ainsi que des inégalités de type isopérimétriques pour un opérateur symétrique vérifiant le critère de courbure dimension. Cette étude est poursuivie dans la prépublication [10] dans le cadre non symétrique où l'on étudie des opérateurs de type Ornstein-Uhlenbeck sur les groupes de Carnot.

La note [6] propose une estimée globale entre la distance sous-riemannienne et une distance riemannienne dans le cas de courbure positive.

Le résultat principal des articles [7] et [8] est l'obtention de la propriété de doublement de la mesure dans le cadre sous-elliptique sous l'hypothèse de courbure positive dans [7] et minorée dans [8].

Dans le travail [9], nous proposons une étude d'opérateurs de Laplace-Beltrami riemannien à l'aide d'une décomposition et d'un critère de courbure-dimension sous-riemannien.

1.2 Autres résultats sur les diffusions sous-elliptiques

J'ai obtenu d'autres résultats de nature un peu différente sur les diffusions sous elliptiques. La motivation première de ces travaux étant d'essayer de comprendre plus précisement l'inégalité de H.Q. Li. et celle de log-Sobolev pour le noyau ed la chaleur. Tous les résultats portent ici sur des groupes de Carnot. Ces espaces correspondent aux espaces tangents en géométrie sous elliptique.

11. *Reverse Poincare inequalities, Isoperimetry and Riesz transforms in Carnot groups.* Nonlinear Anal. 131 (2016), 48–59. (Avec *F. Baudoin*).
12. *On logarithmic Sobolev inequalities for the heat kernel on the Heisenberg group.* To appear in Annales Mathématiques de la Faculté des sciences de Toulouse Arxiv preprint (Avec *D. Chafaï, R. Herry*).
13. Couplings in L^p distance of two Brownian motions and their Lévy area. To appear in Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques. (Avec *N. Juillet*)

Le travail [11] propose une étude de la constante optimale dans l'inégalité de Poincaré inverse pour les groupes de Carnot qui poursuit celle obtenue dans [1] pour Heisenberg.

Dans le travail [12], nous avons implémenté la méthode de tensorisation de L. Gross dans le cas des groupes de Carnot. Dans le cadre classique cette méthode permet d'obtenir l'inégalité de log-Sobolev optimale pour la gaussienne à partir de l'espace à 2 points par tensorisation et en utilisant le théorème central limite.

Nous montrons dans [13] une différence importante entre le cas riemannien et le cas sous-riemannien : pour le groupe de Heisenberg, il n'existe pas de couplages co-adaptés de mouvements Browniens restant à distance bornée. Nous étudions également le couplage par réflection sur le groupe de Heisenberg. Nous construisons finalement un couplage statique explicite nous permettant par dualité de retrouver une version faible de l'inégalité de H.Q. Li.

1.3 Entrelacement entre gradient et semi-groupes de diffusion

Je me suis également intéressé à des diffusions plus classiques elliptiques. Le but est ici principalement d'obtenir des inégalités de Poincaré pour des mesures de la forme $e^{-V}dx$ sur $\mathbb{R}^d$. L'inégalité de Poincaré étant directement reliée à la vitesse de convergence d'un semi-groupe dans L^2, il est intéressant d'obtenir des constantes explicites. Il s'agit donc ici en quelque sorte d'affiner le critère de Bakry-Emery. Pour cela nous considérons les diffusions $\Delta - \nabla V \cdot \nabla$ et regardons les entrelacements avec différents gradients. Un travail dans le cas des variétés riemanniennes est en cours avec Baptiste Huguet étudiant en thèse que nous encadrons avec Marc Arnaudon.

14. *Intertwining relations for one-dimensional diffusions and application to functional inequalities.* Potential Anal. 41 (2014), no. 4, 1005–1031. (Avec *A. Joulin*).
15. *Spectral gap for spherically symmetric log-concave probability measures, and beyond.* J. Funct. Anal. 270 (2016), no. 7, 2456–2482. (Avec *A. Joulin, Y. Ma*).

16. *A note on spectral gap and weighted Poincaré inequalities for some one-dimensional diffusions.* ESAIM Probability and Statistics, vol. 20 (2016), 18-29. (Avec *A. Joulin, Y. Ma*).
17. *Intertwinings and Generalized Brascamp-Lieb Inequalities.* Rev. Mat. Iberoam. 34 (2018), no. 3, 1021–1054. (Avec *M. Arnaudon, A. Joulin*).
18. *Intertwinings, second-order Brascamp-Lieb inequalities and spectral estimates.* Arxiv preprint. (Avec *A. Joulin*).
19. *A note on eigenvalues estimates for one-dimensional diffusion operators.* Arxiv preprint. (Avec *A. Joulin*).

Les travaux [14,16,17,18,19] sont effectivement consacrés aux entrelacements entre gradient et semi-groupe. L'article [15] est un peu différent, on améliore un résultat de Bobkov sur le trou spectral des mesures de probabilités radiales. L'idée nouvelle est d'utiliser une estimée intégrale de type Veysseire pour le trou spectral de la partie radiale.

Dans le travail [14], avec Aldéric Joulin , nous avons commencé à étudier ces entrelacements en dimension 1 et à obtenir des inégalités de Brascamp-Lieb généralisées. On retrouve la formule de Chen-Wang pour le trou spectral, on étudie également des inégalités de Poincaré à poids et on propose un critère pour l'inégalité de log-Sobolev. D'autres exemples explicites, mesures de Subbotin, mesure gaussienne avec un poids sont examinés dans [16] ; leur version multidimensionnelle étant déjà traitée dans [15].

L'article [17] traite le cas général multidimensionnel des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. On y établit des inégalités de Brascamp-Lieb généralisées pour des potentiels non nécessairement convexes ainsi que des versions asymétriques L^1, L^∞ de ces inégalités.

La prépublication [18] s'intéresse à des estimées de Brascamp Lieb d'ordre 2 dans le cadre général multidimensionnel où nous améliorons des résultats de Cordero-Erasuquin. Cet article contient également de nouveaux exemples de systèmes de particules en interactions pour lesquelles le trou spectral est indépendant du nombre de particules.

Dans la prépublication [19], on itère les entrelacements en dimension 1 et on obtient une formule de de type Chen-Wang pour toutes les valeurs propres.

1.4 Etude spectrale de Laplaciens discrets

Les travaux suivants portent sur l'étude de Laplaciens discrets.

20. *Essential spectrum and Weyl asymptotics for discrete Laplacians.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 24 (2015), no. 3, 563–624. Arxiv preprint (Avec *S. Golénia*).

21. *Eigenvalue asymptotics for Schrödinger operators on sparse graphs.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 65 (2015), no. 5, 1969–1998. (Avec *S. Golénia, M. Keller*).

22. *Magnetic sparseness and Schrödinger operators on graphs.* Arxiv preprint (Avec *Sylvain Golénia, Matthias Keller, Shiping Liu, Florentin Münch*).

Dans l'article [20] article, nous étudions le bas du spectre et du spectre essentiel de Laplaciens discrets. Notre travail est basé sur l'inégalité de Hardy et l'étude des fonctions super-harmoniques. Nous obtenons également certaines asymptotiques de Weyl entre les valeurs propres du Laplacien et celle du degré. Avec des arguments de type couplage, nous établissons des résultats de comparaison pour le bas du spectre, le bas du spectre essentiel et la complétude stochastique de différents Laplaciens discrets. Une classe de graphes faiblement symétriques est aussi étudiée en détail.

Dans le travail [21], on s'intéresse plus précisément au lien entre le Laplacien discret et l'opérateur de multiplication par le degré. Une inégalité fonctionnelle entre le Laplacien et le degré est caractérisée en termes géométriques de graphes creux. Des conséquences analytiques (la caractérisation du domaine des formes) et des asymptotiques des valeurs propres sont données. Ce travail traite le cas d'opérateurs de Scrhödinger et donne quelques résultats pour les Laplaciens magnétiques. La prépublication [22] traite plus précisément le cas des Laplaciens magnétiques en introduisant un concept de graphe creux lié au contexte magnétique et à un indice de frustration magnétique.

1.5 Autre travail

23. *A discrete version of Brunn Minkowski inequality and its stability.* Annales Mathématiques Blaise Pascal. 16 (2009), no. 2, 245–257. Arxiv preprint

Dans ce travail, on propose une inégalité de Brunn-Minkowski approchée, qui a un sens pour les espaces discrets. On montre également sa stabilité par convergence de Gromov-Hausdorff pour les espaces métriques mesurés. Notons que dans le traitement synthétique de la courbure de Ricci des espaces métriques mesurés développé indépendamment par Lott-Villani et Sturm, les conséquences principales proviennent de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

2 Diffusions sous-elliptiques et critère de courbure-dimension

2.1 Introduction

De manière générale, que ce soit pour les diffusions sous elliptiques, les entrelacements entre gradients et semi-groupes ou l'étude de Laplaciens discrets, mes travaux de recherche portent sur l'étude du comportement de semi-groupes de diffusion en lien avec la géométrie de l'espace sous-jacent.

Dans le cas d'une variété riemannienne classique, il existe un lien fort entre le comportement du semi-groupe de la chaleur associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami et la géométrie de la variété. Plus précisément, une bonne hypothèse dans ce cadre est l'hypothèse de courbure de Ricci minorée. En se basant sur la formule de Böchner, Bakry and Emery [BÉ85] ont introduit un critère de courbure dimension qui éténd la notion de courbure de Ricci minorée pour des semi-groupes de Markov généraux.

Cependant le critère de Bakry-Emery requiert une forme d'ellipticité pour le générateur et n'est pas satisfait dans des situations dégénérées comme par exemple dans le cas du sous Laplacien canonique sur le groupe de Heisenberg.

Cette longue section présente un premier axe de mes recherches qui consiste à proposer et surtout étudier un critère de courbure généralisé adapté à la situation sous-elliptique.

Cette étude a déjà été commencée pendant la thèse avec l'étude de 3 espaces modèles : le groupe de Heisenberg, le groupe $SU(2,\mathbb{R})$ et le revêtement universel de $SL(2,\mathbb{R})$. Ces 3 espaces correspondent à des espaces de courbure constante : nulle pour Heisenberg, positive pour $SU(2,R)$ et négative pour $SL(2,\mathbb{R})$. Le critère de courbure dimension a été introduit dans [BBBQ09] dans le cas de ces 3 espaces modèles. A la suite, Baudoin et Garofalo [BG17a] ont développé cette étude de manière systématique et proposé un cadre géométrique dans lequel ce critère est satisfait de manière naturelle. De nombreux autres travaux ont alors suivis et clarifié le cadre géométrique [Elw14, BKW16, GT16a, GT16b, GT16c, BGKT17].

On s'intéresse donc à des opérateurs de diffusion sous-elliptiques sur une variété $\mathcal{M}$. Ces opérateurs sont de la forme :

$$L = \sum_{i=1}^{d} X_i^2 + X_0$$

où $X_0, X_1, \dots X_d$ sont des champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$. Dans une carte, ces opérateurs s'écrivent

$$L = \sum_{i,j} a_{i,j}\partial_{i,j} + \sum_i b_i\partial_i$$

avec $(a_{i,j})_{i,j}$ une matrice symétrique positive, non nécessairement définie positive. Si la matrice est définie positive on dit que l'opérateur est elliptique. L'opérateur L est un opérateur différentiel linéaire, local et vérifiant le principe du maximum suivant : si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ admet un minimum local en x alors $L(f)(x) \geq 0$.

On s'intéresse ici à des cas dégénérés. On suppose néanmoins que la condition suivante de Hörmander est vérifiée : l'algèbre des crochets itérés des champs de vecteur $\{X_i, i = 1, \ldots, d\}$ engendrent tout l'espace tangent à la variété en tout point. Ici nous n'avons pas utilisé la dérive X_0 dans la condition de Hörmander. Il est donc possible de définir une vraie distance associée à l'opérateur L (théorème de Chow, voir par exemple le livre [Mon02]).

Sous l'une des hypothèses précédentes, Hörmander [Hör55] a montré que l'opérateur L est hypo-elliptique ; c'est -à-dire qu'il possède la propriété de régularité suivante : si $Lf = g$ au sens des distributions et si g est $\mathcal{C}^\infty$ alors f est aussi $\mathcal{C}^\infty$.

Dans notre travail, nous n'avons considéré simplement que des cas d'ordre 2 c'est-a-dire où les champs de vecteurs ainsi que leur crochets engendrent l'espace tangent.

La métrique sous-riemannienne s'obtient en ne considérant en chaque point de $\mathcal{M}$ que le sous-espace, dit horizontal, $\mathcal{H} = Vect(X_i, 1 \leq i \leq d)$ de l'espace tangent et en déclarant que la base $(X_1, \ldots X_d)$ est orthonormale. La distance sous-riemannienne est alors définie par

$$d_{cc}(x, y) = \inf_{\gamma \in \mathcal{A}} \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des courbes horizontales, c'est-à-dire $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont les vecteurs tangents appartiennent au sous-espace $\mathcal{H}$ de l'espace tangent, telles que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Il est aussi possible d'associer une distance d_L directement à l'opérateur L, cette distance est définie par :

$$d_L(x, y) = \sup_{f \in \mathcal{C}} f(x) - f(y) \tag{2.1}$$

où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ telles que $\Gamma(f, f) \leq 1$ avec

$$\Gamma(f, f) = \frac{1}{2} \left(Lf^2 - 2fLf \right).$$

Ici,

$$\Gamma(f, f) = \sum_{i=1}^d (X_i f)^2.$$

Cette distance coïncide en fait exactement avec la distance sous-riemannienne définie précédemment (voir par exemple [JSC87]). On notera $|\nabla_h f|^2 = \sum_{i=1}^d (X_i f)^2$. Dans le cas où les crochets avec X_0 sont aussi utilisés dans la condition de Hörmander, la quantité (2.1) ne définit plus nécessairement une distance. Le travail remarquable de Villani [Vil09] sur l'hypocoercivité traite de cette situation. Citons également les travaux de Guilin et Wang [GW12] par couplage pour des diffusions de Fokker-Planck cinétiques où la diffusion n'a lieu que sur la vitesse. Plus récemment Baudoin a montré que le critère de courbure dimension généralisé pouvait aussi être utilisé dans ce contexte [Bau17a] (voir aussi partie 7 de [Bau16]).

Dans la majorité des cas, nous allons supposer que l'opérateur est symétrique (et négatif) pour une certaine mesure μ : si $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathcal{M}} f\, Lg d\mu = \int_{\mathcal{M}} Lf\, g d\mu = -\int_{\mathcal{M}} \nabla_h f \cdot \nabla_h g d\mu.$$

Nous travaillerons enfin sur des variétés sous-riemanniennes complètes. La proposition suivante montre alors que l'opérateur L est essentiellement auto-adjoint. Nous rappelons qu'un opérateur symétrique sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ par rapport à une mesure borélienne est dit essentiellement auto-adjoint s'il existe une unique extension sur un domaine dense de $L^2_\mu(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ auto-adjointe. Remarquons aussi que pour un opérateur symétrique et positif, il existe une extension minimale canonique (appelée extension de Friedrichs) en un opérateur auto-adjoint.

Proposition 2.1. *Soit L un opérateur de diffusion hypoelliptique de type Hörmander sur une variété $\mathcal{M}$ à coefficient $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. S'il existe une suite de fonctions $h_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ telle que $0 \leq h_n \leq 1$, $h_n \nearrow 1$ et $\|\Gamma(h_n, h_n)\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$, alors l'opérateur L est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. De plus la métrique associée à L est complète.*

Pour une référence à propos de cette proposition, on peut consulter [Str83] pour le cas elliptique et [Str86] pour le cas sous elliptique. On notera encore l'extension auto-adjointe par L. Le théorème spectral nous permet alors de définir le semi-groupe : $(P_t)_{t\geq 0} = (e^{tL})_{t\geq 0}$. C'est un semi-groupe de contraction dans $L^2_\mu(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ de générateur L.

Le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ est aussi un semi-groupe sous-markovien (voir par exemple le chapitre 1 de [FŌT94]) , c'est-à-dire :

$$\text{si } u \in L^2_\mu(\mathcal{G}, \mathbb{R}) \text{ et } 0 \leq u \leq 1, \text{ alors } 0 \leq P_t u \leq 1 \ \mu-\text{presque sûrement.}$$

Enfin, les résultats de Hörmander impliquent aussi que la solution fondamentale du semi-groupe, que l'on appellera noyau de la chaleur par la suite, appartient à l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ et est strictement positive sur tout $\mathcal{M}$.

Présentons maintenant plus précisément le critère de courbure dimension de Bakry-Emery. Etant donné un opérateur de diffusion L, on définit premièrement l'opérateur " carré du champ" Γ :

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\left(L(fg) - fLg - gLf\right). \tag{2.2}$$

Cet opérateur ne dépend que de la partie d'ordre 2 de L et correspond généralement à la norme au carré d'un gradient. Définissons maintenant l'opérateur " carré du champ itéré" Γ_2 :

$$\Gamma_2(f,g) = \frac{1}{2}\left(L(\Gamma(f,g) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(g,Lf)\right). \tag{2.3}$$

Pour $\rho \in \mathbb{R}$ et $n > 0$, on dit que le critère de courbure $CD(\rho,n)$ est vérifié si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M},\mathbb{R})$:

$$\Gamma_2(f,f) \geq \rho\Gamma(f,f) + \frac{1}{n}(Lf)^2. \tag{2.4}$$

On parle du critère $CD(\rho,\infty)$ lorsque toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M},\mathbb{R})$ vérifie :

$$\Gamma_2(f,f) \geq \rho\Gamma(f,f). \tag{2.5}$$

Le lien entre la géométrie et le formalisme Γ_2 est donnée par la formule de Böchner : lorsque L est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété riemannienne de dimension n, on peut écrire :

$$\Gamma_2(f,f) = \|Hessf\|_2^2 + Ric(\nabla f, \nabla f).$$

Ainsi, si L est l'opérateur de Laplace Beltrami sur une variété riemannienne de courbure de Ricci minorée par ρId et de dimension (inférieure) à n, L vérifie $CD(\rho,n)$.

Bien évidemment ces critères s'appliquent aussi pour d'autres opérateurs de diffusion, par exemple pour des opérateurs de la forme : $\Delta - \nabla V.\nabla$ associé à des mesures $e^{-}Vdvol$. L'exemple typique étant celui de la gaussienne sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie le critère $CD(1,\infty)$.

2.2 Le groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}$ est l'espace modèle en géométrie sous-riemannienne. C'est un groupe de Lie mais il s'agit en fait juste de $\mathbb{R}^3$ muni de la loi de groupe :

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = \left(x+x', y+y', z+z' + \frac{1}{2}(xy' - yx')\right).$$

Les champs de vecteur invariants à gauche sont

$$X(f)(x,y,z) = (\partial_x - \frac{y}{2}\partial_z)f(x,y,z)$$

$$Y(f)(x,y,z) = (\partial_y + \frac{x}{2}\partial_z)f(x,y,z)$$

$$Z(f)(x,y,z) = \partial_z f(x,y,z).$$

Le sous Laplacien canonique est alors donné par :

$$\Delta_{\mathbb{H}} = X^2 + Y^2.$$

Il est symétrique pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$. Les champs de vecteur vérifient les relations

$$[X,Y] = Z,\ [X,Z] = [Y,Z] = 0;$$

et la condition de Hörmander précédente est clairement vérifiée. Ces relations de crochets montrent que l'algèbre de Lie $\mathfrak{H}$ est stratifiée et vérifie

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1,$$

où $\mathfrak{H}_0 = \mathrm{span}(X,Y)$ et $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{span}(Z)$ est le centre de $\mathfrak{H}_0$. La loi du groupe de Heisenberg s'obtient donc comme une version particulièrement simple de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff sur $\mathfrak{H}$:

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B]\right), \quad A, B \in \mathfrak{H}.$$

La loi du groupe de Heisenberg est également reliée à la notion d'aire balayée. Si on considère 2 courbes γ et γ' de $\mathbb{R}^2$ partant de $(0,0)$ et finissant respectivement en (x,y) et (x',y'), balayant respectivement une aire z et z' et que l'on concatène ces 2 courbes alors le point final de la concaténation des 2 courbes est

$$(x + x', y + y')$$

tandis que la nouvelle aire balayée est :

$$z + z' + \frac{1}{2}(xy' - yx').$$

D'un point de vue probabiliste, le processus de Markov de générateur $\Delta_{\mathbb{H}}$ est appelé le mouvement Brownien (sous elliptique) sur le groupe de Heisenberg. C'est un processus continu, invariant par multiplication à gauche et à accroissement indépendants et stationnaires. En lien avec la discussion précédente, le mouvement Brownien partant de l'identité $(0,0,0)$ admet la représentation suivante :

$$\mathbf{B}_t := \left(B_t^1, B_t^2, \frac{1}{2}\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2 - \int_0^t B_s^2 dB_s^1\right)\right) \tag{2.6}$$

où $(B_t^1)_{t\geq 0}$ et $(B_t^2)_{t\geq 0}$ sont deux mouvements Browniens réels standards indépendants. L'intégrale stochastique $\int_0^t B_s^1 dB_s^2 - \int_0^t B_s^2 dB_s^1$ est appelée l'aire de Lévy du mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^2$: $(B_t)_{t\geq 0} := (B_t^1, B_t^2)_{t\geq 0}$.

Le groupe de Heisenberg admet une dilatation non isotrope :

$$\mathrm{Dil}_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z);\ \lambda > 0.$$

Cette dilatation est compatible avec la loi du groupe :

$$\mathrm{Dil}_\lambda(g \cdot g) = \mathrm{Dil}_\lambda(g) \cdot \mathrm{Dil}_\lambda(g')$$

et avec la distance sous riemannienne (appelée aussi de Carnot-Carathéodory), pour $\lambda > 0$ et $g, g' \in \mathbb{H}$,

$$d_{cc}(\mathrm{Dil}_\lambda(g), \mathrm{Dil}_\lambda(g')) = \lambda d_{cc}(g, g').$$

Un point important pour le groupe de Heisenberg est la formule de Gaveau [BGG00] : le noyau de la chaleur s'écrit comme la transformée de Fourier en z

$$p_t(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\lambda z}{t}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\lambda \coth\lambda\right) \frac{\lambda}{\sinh\lambda} d\lambda. \tag{2.7}$$

Le noyau de la chaleur vérifie les estimées optimales suivantes [BGG00, Li07] :

$$\frac{C_1}{\sqrt{t^4 + t^3 r d_{cc}(e,g)}} \exp\Big(-\frac{d_{cc}^2(e,g)}{4t}\Big) \leq p_t(e,g) \leq \frac{C_2}{\sqrt{t^4 + t^3 r d_{cc}(e,g)}} \exp\Big(-\frac{d_{cc}^2(e,g)}{4t}\Big) \tag{2.8}$$

avec $r^2 := x^2 + y^2$.

Il est possible aussi de considérer cette représentation en termes d'aires balayées sur la sphère S_2 et sur l'espace hyperbolique H_2. Cela conduit à des structures sous riemanniennes naturelles sur $SU(2)$ et sur le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$. (Je tiens ici à remercier encore le rapporteur de [Bon12] dont les remarques m'ont permis de corriger l'erreur suivante présente dans ma thèse : les représentations du noyau de la chaleur de la partie 4.5 de ma thèse [0] ne sont pas valables pour le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ mais pour son revêtement universel).

Pour ce qui nous intéresse ici, on peut trouver 3 champs de vecteurs X, Y, Z vérifiant

$$[X, Y] = Z,\ [X, Z] = -\rho Y,\ [Y, Z] = \rho X;$$

avec $\rho = 1$ pour $SU(2)$ et $\rho = -1$ pour le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$. Notons également que le groupe de Heisenberg vérifie les mêmes relations mais avec $\rho = 0$.

Dans chacun des cas, le sous Laplacien que l'on considère est $L = X^2 + Y^2$. Il est symétrique par rapport à la mesure de Haar et vérifie clairement la condition de Hörmander. L'opérateur Γ_2 associé est donné par

$$\Gamma_2(f,f) =(X^2 f)^2 + (Y^2 f)^2 + \frac{1}{2}((XY + YX)f)^2 + \frac{1}{2}(Zf)^2 \tag{2.9}$$
$$+ \rho\Gamma(f,f) - 2(Xf)(YZf) + 2(Yf)(XZf). \tag{2.10}$$

Du fait des termes croisés : $-2(Xf)(YZf) + 2(Yf)(XZf)$, le critère de courbure dimension $CD(\rho, \infty)$ n'est pas vérifié.

L'idée initiée dans [BBBQ09] est de considérer une nouvelle forme bilinéaire symétrique notée Γ^Z, vérifiant pour $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$

$$\Gamma^Z(fg, h) = f\Gamma^Z(g, h) + g\Gamma^Z(f, h),$$

et $\Gamma^Z(f) = \Gamma^Z(f,f) \geq 0$.

Similairemant à (2.3), on définit :

$$\Gamma_2^Z(f,g) = \frac{1}{2}\left(L(\Gamma^Z(f,g) - \Gamma^Z(f, Lg) - \Gamma^Z(g, Lf)\right). \tag{2.11}$$

Dans le cas de [BBBQ09], on considère simplement $\Gamma^Z(f,f) = (Zf)^2$.

Dans la suite, on notera librement : $\Gamma(f) = \Gamma(f,f)$, $\Gamma^Z(f) = \Gamma^Z(f,f)$, $\Gamma_2(f) = \Gamma_2(f,f)$, $\Gamma_2^Z(f) = \Gamma_2^Z(f,f)$.

La définition suivante présente le critère de courbure-dimension généralisé de Baudoin et Garofalo [BG17a].

Définition 2.2. *On dit alors que l'opérateur L vérifie le* critère de courbure dimension généralisé $\mathrm{CD}(\rho_1, \rho_2, \kappa, d)$ *s'il existe des constantes $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_2 > 0$, $\kappa \geq 0$ et $0 < d \leq \infty$ telle que l'inégalité*

$$\Gamma_2(f) + \nu\Gamma_2^Z(f) \geq \frac{1}{d}(Lf)^2 + \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)\Gamma(f) + \rho_2\Gamma^Z(f)$$

soit satisfaite pour tout $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ et tout $\nu > 0$.

Remarque 2.3. *Dans la définition précédente il est bien sûr sous entendu que* $\mathrm{CD}(\rho_1, \rho_2, \kappa, \infty)$ *signifie :*

$$\Gamma_2(f) + \nu\Gamma_2^Z(f) \geq \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)\Gamma(f) + \rho_2\Gamma^Z(f)$$

Dans le cas des espaces modèles précédents, on trouve :

$$\Gamma_2^Z(f,f) = \Gamma(Zf, Zf) = (XZf)^2 + (YZf)^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre alors facilement que pour tout $\nu > 0$,

$$\Gamma_2(f) + \nu\Gamma_2^Z(f) \geq \frac{1}{2}(Lf)^2 + \frac{1}{2}(Zf)^2 + \left(\rho - \frac{1}{\nu}\right)\Gamma(f); \tag{2.12}$$

c'est-à-dire que le critère $CD(\rho_1, \rho_2, \kappa, d)$ est satisfait avec $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \frac{1}{2}, \kappa = 1, d = 2$.

Un des points importants est la commutation entre les opérateurs Γ et Γ^Z. On fera ainsi l'hypothèse suivante qui est bien vérifiée dans le cas des espaces modèles ci-dessus.

(H.2) Pour toute $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ on a :

$$\Gamma(f, \Gamma^Z(f)) = \Gamma^Z(f, \Gamma(f)).$$

Ce critère de courbure-dimension généralisé a été particulièrement étudié par Baudoin et Garofalo. Dans [BG17a], les auteurs ont montré que ce critère ainsi que l'hypothèse (H.2) est satisfaite de manière naturelle, c'est-à-dire à l'aide de formule de Böchner, pour des variétés à symétrie transverses. Elworthy a ensuite montré (voir la proposition 6.1 dans [Elw14]) que ces variétés à symétrie transverse correspondent en fait à des : feuilletages riemanniens avec une métrique de type fibré et des feuilles totalement géodésiques.

Ce point de vue plus probabiliste a aussi été considéré par Baudoin Kim et J.Wang avec l'étude de formules de type Weizenböck sur ces modèles [BKW16] , voir également les travaux de Grong et Thalmaier [GT16a, GT16b, GT16c] ainsi que [BGKT17, BG17b].

Une autre approche initiée par Agrachev et Zelenko [AZ02b, AZ02a] consiste à étudier les courbes de Jacobi dans la variété cotangente. Cette approche a conduit à des propriétés de contraction de la mesure [AL14, AL15] ainsi que plus récemment, après le travail [BKS18] sur le groupe de Heisenberg à une inégalité d'interpolation de type Brunn-Minkowski sous riemannienne [BR19]. Rappelons le résultat de Nicolas Juillet [Jui08] qui a montré que le groupe de Heisenberg ne satisfait pas à la généralisation de la courbure de Ricci définie par Lott-Villani et Sturm, mais vérifie la propriété de contraction de la mesure $MCP(0, 5)$.

Travailler dans un cadre général pour étudier ces semi-groupes n'est pas une chose facile : voir par exemple la section 3.3 intitulée “heart of darkness” dans [BGL14].

On fera ici l'hypothèse suivante :

(H.1) Il existe une suite croissante $h_k \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ telle que $h_k \nearrow 1$ sur $\mathcal{M}$, et
$$||\Gamma(h_k)||_\infty + ||\Gamma^Z(h_k)||_\infty \to 0, \quad \text{as } k \to \infty.$$

Cette hypothèse technique, dont on a déjà parlée, traduit en général que la variété riemannienne associée est complète. En particulier elle implique que dans le cas symétrique, l'opérateur L est essentiellement auto-adjoint et nous permet par le théorème spectral de définir le semi-groupe $P_t := e^{tL}$.

Dans le cas non symétrique, pour construire le semi-groupe on ajoutera l'hypothèse (voir [Wan12] et [BBC19]) :

(H.3) Il existe une fonction de Lyapunov, $W \geq 1$ vérifiant $\Gamma(W) + \Gamma^Z(W) \leq CW^2$, $LW \leq CW$, et telle que $\{W \leq m\}$ est compact pour tout $m > 1$.

2.3 Inégalité de H.Q. Li

Commençons par rappeler le résultat suivant (écrit ici dans le cadre d'un opérateur de diffusion sur une variété riemannienne complète) qui relie le critère Γ_2 à des sous commutations entre le semi-groupe et le gradient. On pourra consulter les livres [ABC+00] et [BGL14] pour tous les résultats concernant le critère $CD(\rho, \infty)$.

Théorème 2.4. *Soit L un opérateur de diffusion sur une variété complète et P_t le semi-groupe associé. Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le critère $CD(\rho, \infty)$ est satisfait.*
2. $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}),\ \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{M}\ |\nabla P_t(f)(x)| \leq e^{-\rho t} P_t(|\nabla f|)(x).$
3. $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}),\ \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{M},\ |\nabla P_t(f)(x)|^2 \leq e^{-\rho t} P_t(|\nabla f|^2)(x).$

L'intérêt principal du critère Γ_2 de Bakry-Emery est d'obtenir des inégalités fonctionnelles. Il est en fait équivalent à un grand nombre d'inégalités fonctionnelles locales, c'est à-dire pour la mesure $P_t(\cdot)(x)$ parmi lesquelles des inégalités de Poincaré et de log-Sobolev.

Théorème 2.5. *Soit L un opérateur de diffusion sur une variété complète et P_t le semi-groupe associé. Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le critère $CD(\rho, \infty)$ est satisfait.*
2. *L'inégalité de Poincaré est satisfaite : $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$:*
$$P_t(f^2) - P_t(f)^2 \leq \frac{1 - e^{-2\rho t}}{\rho} P_t(\Gamma(f))$$
3. *L'inégalité de log-Sobolev est satisfaite : $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}),\ f > 0,$*
$$P_t(f \ln(f)) - P_t(f) \ln(P_t(f)) \leq \frac{1 - e^{-2\rho t}}{2\rho} P_t\left(\frac{\Gamma(f)}{f}\right)$$

4. L'inégalité de Poincaré inverse est satisfaite :, $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$,

$$P_t(f^2) - P_t(f)^2 \geq \frac{e^{2\rho t} - 1}{\rho} \Gamma(P_t f)$$

5. L'inégalité de log Sobolev inverse est satisfaite : $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$, $f > 0$, *:*

$$P_t(f \ln(f)) - P_t(f) \ln(P_t(f)) \geq \frac{e^{2\rho t} - 1}{2\rho} \frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f}$$

Le critère $CD(\rho, \infty)$ est en fait équivalent à d'autres inégalités fonctionnelles comme l'inégalité isopérimétrique de Cheeger ou des inégalités isopérimétriques directe et inverse de Bobkov.

Dans le cas $\rho > 0$, on en déduit l'inégalité de Poincaré et de log-Sobolev pour la mesure invariante μ.

Théorème 2.6. *Soit* $\rho > 0$. *Soit* L *un opérateur de diffusion sur une variété complète vérifiant le critère* $CD(\rho, \infty)$. *Alors,*

1. L'inégalité de Poincaré est satisfaite : $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$ *:*

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{\rho} \int \Gamma(f) d\mu. \tag{2.13}$$

2. L'inégalité de Log-Sobolev est satisfaite : $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$, $f > 0$,

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \leq \frac{1}{2\rho} \int \left(\frac{\Gamma(f)}{f} \right) d\mu. \tag{2.14}$$

L'inégalité de log-Sobolev peut également s'écrire :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}), \mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq \frac{2}{\rho} \int \Gamma(f, f) d\mu.$$

L'inégalité de Log-Sobolev est plus forte que l'inégalité de Poincaré. Elle conduit à de la concentration gaussienne tandis que celle de Poincaré ne produit que de la concentration exponentielle. L'inégalité de Poincaré décrit la vitesse de convergence vers l'équilibre dans L^2. Dans le cas symétrique, elle a une interprétation spectrale claire : elle est équivalente au fait que le spectre de $-L$ appartienne à $\{0\} \cup [\frac{1}{\rho}, +\infty)$. On appellera dans la suite la plus grande constante $\frac{1}{\rho}$ le trou spectral de $-L$ et on la notera : $\lambda_1(-L, \mu)$.

Dans les cas sous elliptiques, le critère de Bakry-Emery n'est pas satisfait et les théorèmes précédents ne s'appliquent plus. Cependant Driver et Melcher [DM05] ont montré que la sous commutation suivante était valable sur le groupe de Heisenberg :

$$|\nabla_h(P_t f)|^2 \leq C_2 P_t(|\nabla_h f|^2) \tag{2.15}$$

avec C_2 une constante $C_2 \geq 2$. Ce résultat a été amélioré par H.Q. Li [Li06] qui a prouvé

$$|\nabla_h(P_t f)| \leq C_1 P_t(|\nabla_h f|). \tag{2.16}$$

avec C_1 une constante $C_1 \geq \sqrt{2}$. L'inégalité (2.16) implique l'inégalité (2.15) et elle est beaucoup plus dure à prouver. Les mêmes conséquences que sous le critère Γ_2 sont encore vraies. Ainsi, l'inégalité (2.15) implique l'inégalité de Poincaré pour le noyau de la chaleur sous elliptique tandis que (2.16) implique celle de log-Sobolev. Dans [BBBC08], nous avons donné deux nouvelles preuves de (2.16) : une basée sur une inégalité de type Cheeger, l'autre sur la commutation entre le sous Laplacien et un gradient complexe. Dans les deux cas, un des arguments clés reste les estimées optimales du noyau de la chaleur. L'inégalité (2.16) reste encore mystérieuse. Il serait intéressant d'obtenir une preuve stochastique de cette inégalité. C'est un point qui a guidé certaines de mes recherches.

L'inégalité (2.15) est en fait valable pour tous les groupes de Lie ([Mel08]). L'inégalité (2.16) a été étendue par Eldredge [Eld10] au cas des groupes de Carnot de type H.

Une autre approche pour démontrer l'inégalité de Log-Sobolev pour le noyau de la chaleur sur Heisenberg a été proposée par Hebish et Zegarlinski [HZ10]. L'idée est d'utiliser des techniques proches de l'inégalité de Hardy (voir proposition 4.6) pour obtenir des inégalités pour la mesure $e^{-\frac{d^2}{4}}dx$ et de les transférer au noyau de la chaleur sur Heisenberg grâce aux estimées optimales du noyau de la chaleur (2.8).

2.4 Retour sur le critère de courbure dimension généralisé.

L'utilisation du critère de courbure dimension se fait à travers des inégalités différentielles. Elles sont obtenues en dérivant certaines interpolations du semi-groupe : par exemple formellement,

$$\frac{d}{ds} P_s\big((P_{t-s}f)\Gamma(\ln P_{t-s}f)\big)(x) = P_s\big((P_{t-s}f)\Gamma_2(\ln P_{t-s}f)\big)(x).$$

Le résultat précédent reste souvent formel. Pour travailler plus rigoureusement, on utilise le lemme élémentaire suivant puis des résultats de comparaison paraboliques :

Lemme 2.7. *Soit f une fonction positive $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, et posons pour $0 \leq s \leq t$,*

$$\phi_1(s) = (P_{t-s}f)\Gamma(\ln P_{t-s}f) \tag{2.17}$$

et

$$\phi_2(s) = (P_{t-s}f)\Gamma^Z(\ln P_{t-s}f). \tag{2.18}$$

Alors ϕ_1 et ϕ_2 vérifient :

$$\left(\frac{d}{ds} + L\right)\phi_1(s) = 2(P_{t-s}f)\Gamma_2(\ln P_{t-s}f)$$

et
$$\left(\frac{d}{ds}+L\right)\phi_2(s)=2(P_{t-s}f)\Gamma_2^Z(\ln P_{t-s}f).$$

C'est ici que l'hypothèse $(H.2)$ intervient de manière cruciale. Elle n'est pas nécessaire pour certaines quantités où le logarithme n'apparaît pas : par exemple pour $\psi_1=\Gamma(P_{t-s}f)$ et $\psi_2=\Gamma^Z(P_{t-s}f)$.

Les résultats de comparaison paraboliques nécessitent des hypothèses pour le semi-groupe (voir propositions 4.2 et proposition 4.5 (juste stoch-completeness dans [BG17a]) à savoir :

(H4) Le semi groupe est stochastiquement complet ($P_t 1=1$) et le gradient du semi-groupe est borné dans L^∞.

Dans le cas riemannien, sous le critère de courbure de Bakry-Emery, cette hypothèse est automatiquement satisfaite [Bak86]. Cette hypothèse est aussi satisfaite automatiquement mais de manière non triviale dans les cas des variétés complètes à symétrie transverse de type Yang-Mills (voir proposition 4.3 dans [BG17a]). Voir également le théorème 4.2 dans [BKW16] ou [GT16c] où (H4) est établie grâce à une formule de Weizenböck. Une autre approche due à F.Y.Wang [Wan12] consiste à montrer que l'hypothèse (H3) implique l'hypothèse (H4) Elle a été utilisée dans le cas sous-riemannien par Grong et Thalmaier [GT16a, GT16b] ainsi que Baudoin théorème 7.3 dans [Bau16].

Soit $T>0$, et posons :

$$\Phi_1(s)=P_s\big((P_{T-s}f)\Gamma(\ln P_{T-s}f)\big),\ \Phi_2(s)=P_s\big((P_{T-s}f)\Gamma^Z(\ln P_{T-s}f)\big)$$

Pour $\varepsilon>0$, notons $\mathcal{A}_\varepsilon$ l'ensemble des fonctions $f=\varepsilon+g$ avec $g\in\mathcal{C}_0(\mathcal{M},\mathbb{R}_+)$. Le théorème clé qui nous permettra d'utiliser le critère de courbure dimension généralisé est alors :

Théorème 2.8. *[BBBQ09, BG17a]*

Sous les hypothèses et sous le critère de courbure dimension : $\mathrm{CD}(\rho_1,\rho_2,\kappa,d)$ *Soient* $a,b\in\mathcal{C}_c^{\infty 1}([0,T],\mathbb{R}_+)$ *et* $\gamma\in\mathcal{C}_c^\infty([0,T],\mathbb{R}_+)$. *Alors pour toute fonction* $f\in\mathcal{A}_\varepsilon$ *,*

$$\begin{aligned}a(T)P_T(f\Gamma(\ln f))+b(T)P_T(f\Gamma^Z(\ln f))-a(0)(P_Tf)\Gamma(\ln P_tf))-b(0)(P_Tf)\Gamma(\ln P_tf)\\ \geq\int_0^T\left(a'+2\rho_1a-2\kappa\frac{a^2}{b}-\frac{4a\gamma}{d}\right)\Phi_1(s)ds+\int_0^T\left(b'+2\rho_2a\right)\Phi_2(s)ds\\ +\left(\frac{4}{d}\int_0^T a\gamma ds\right)LP_Tf-\left(\frac{2}{d}\int_0^T a\gamma^2ds\right)P_Tf.\end{aligned}$$

Il sera souvent intéressant d'utiliser le résultat ci-dessus avec b de classe $\mathcal{C}^2$ et décroissante, $a=-\frac{b'}{2\rho_2}$ ainsi que $\gamma=\frac{d}{4}\left(\frac{b''}{b'}+\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{b'}{b}+2\rho_1\right)$ de telle sorte que

$$b'+2\rho_2a=0 \text{ et } a'+2\rho_1a-2\kappa\frac{a^2}{b}-\frac{4a\gamma}{d}=0.$$

2.5 Inégalités de Li-Yau

En géométrie riemannienne, sous une hypothèse de courbure de Ricci minorée, l'inégalité de Li-Yau [LY86] fournit des bornes du gradient des solutions positives de l'équation de la chaleur. Dans sa fome la plus simple, si $\mathcal{M}$ est une variété riemannienne de dimension n et de courbure de Ricci positive, et si f est une solution positive de l'équation de la chaleur : $\partial_t f = \Delta f$, avec Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathcal{M}$, alors avec $u = \ln f$, l'inégalité de Li-Yau s'écrit

$$\partial_t u \geq |\nabla u|^2 - \frac{n}{2t}. \tag{2.19}$$

Cette inégalité est optimale dans le sens où la gaussienne qui correspond au noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ réalise l'égalité.

Bakry et Ledoux [BL06] ont proposé une méthode basée sur le formalisme Γ_2 ; le critère $CD(\rho, n)$ conduisant à une inégalité différentielle non linéaire de la forme : $\Phi'(s) \geq (A\Phi(s) + B)^2 + C$ pour Φ_1 la fonction définie en (2.17).

Théorème 2.9. *[BBBQ09, BG17a]*

Sous les hypothèses précédentes et sous le critère de courbure dimension, on obtient

$$\Gamma(\ln P_t f) + \frac{2\rho_2}{3} t \Gamma^Z(\ln P_t f)$$
$$\leq \left(1 + \frac{3\kappa}{2\rho_2} - \frac{2\rho_1}{3} t\right) \frac{LP_t f}{P_t f} + \frac{d\rho_1^2}{6} t - \frac{d\rho_1}{2}\left(1 + \frac{3\kappa}{2\rho_2}\right) + \frac{d\left(1 + \frac{3\kappa}{2\rho_2}\right)^2}{2t}.$$

La preuve consiste simplement à appliquer le théorème 2.8 ci-dessus avec b avec $T = t$ de classe $\mathcal{C}^2$ et décroissante, $a = -\frac{b'}{2\rho_2}$ ainsi que $\gamma = \frac{d}{4}\left(\frac{b''}{b'} + \frac{\kappa}{\rho_2}\frac{b'}{b} + 2\rho_1\right)$ de telle sorte que

$$b' + 2\rho_2 a = 0 \text{ et } a' + 2\rho_1 a - 2\kappa \frac{a^2}{b} - \frac{4a\gamma}{d} = 0;$$

puis de choisir b nulle au temps final. Les constantes ne sont pas optimales. Ce sont celles obtenues pour $b(s) = (t-s)^3$.

En intégrant le long des géodésiques, cela conduit directement à l'inégalité de Harnack. L'inégalité de Harnack contrôle le semi-groupe en un temps et un point donnés par le même semi-groupe en un temps futur et un point possiblement différent. Elle est écrite ci dessous dans le cas de courbure positive ou nulle. Elle s'étend bien évidemment pour le noyau de la chaleur.

Théorème 2.10. *Sous les hypothèses précédentes et sous le critère de courbure dimension avec $\rho_1 \geq 0$, on obtient pour $f \geq 0$ et $0 < s < t$,*

$$P_s(f)(x) \leq P_t f(y) \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{D}{2}} \exp\left(\frac{D}{d}\frac{d_{cc}(x,y)^2}{t-s}\right)$$

avec

$$D = d\left(1+\frac{3\kappa}{2\rho_2}\right).$$

Contrairement au cas riemannien, on a montré que le paramètre $D/2$ ne pouvait pas être optimal même sur le groupe de Heisenberg (voir [BBBQ09]).

2.6 Estimées de type Myers du diamètre

Dans le cas où le paramètre $\rho_1 > 0$, il est possible d'obtenir une décroissance exponentielle dans l'inégalité de type Li-Yau. Il s'agit pour cela de considérer $b(s) = (e^{-\alpha t} - e^{-\alpha s})^\beta$. Dans le cas de $SU(2,R)$, on obtient pour tout $f \geq 0$ et tout $\alpha > 2$,

$$\Gamma(\ln P_t f)(x) + \frac{3}{2}\left(\frac{1-e^{-\frac{2\rho t}{3\alpha}}}{\rho}\right)(Z\ln P_t f)^2(x) \leq A_\alpha e^{-\frac{2\rho t}{3\alpha}}\frac{LP_t f(x)}{P_t f(x)} + \frac{3}{2}\rho B_\alpha \frac{e^{-\frac{4\rho t}{3\alpha}}}{1-e^{-\frac{2\rho t}{3\alpha}}} \tag{2.20}$$

avec A_α et B_α des constantes : pour les constantes précises voir [BBBQ09] pour le cas $SU(2,\mathbb{R})$ et voir l'inégalité (10.4) dans [BG17a] pour les constantes précises dans le cas du critère de courbure dimension général.

De plus, il est en fait possible dans ce cas $\rho_1 > 0$ d'obtenir un signe négatif devant le terme : $\frac{LP_t f}{P_t f} = \partial_t \ln P_t f$.

Et avec une étude précise, on a pu obtenir pour $SU(2,\mathbb{R})$

$$|\partial_t \ln P_t f(x)| \leq C\exp\left(-\frac{\rho t}{3}\right), \quad t \geq t_0.$$

D'où (après avoir montré la convergence) en intégrant l'inégalité entre t et $+\infty$,

$$\exp\left(-C_2\exp\left(-\frac{\rho t}{3}\right)\right) \leq p_t(x,y) \leq \exp\left(C_2\exp\left(-\frac{\rho t}{3}\right)\right).$$

et finalement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour toute $f \in L^2(\mu)$ telle que $\int f d\mu = 0$,

$$(P_t f)^2 \leq C_3 \exp\left(-\frac{2\rho t}{3}\right)\int f^2 d\mu.$$

Le semi-groupe étant symétrique, cela conduit à un trou spectral supérieur à $\frac{\rho}{3}$. Cette valeur est non optimale, car ce trou spectral pour $SU(2,\mathbb{R})$ vaut $\frac{\rho}{2}$.

De plus, l'inégalité (2.20), produit une borne supérieure du noyau de la chaleur et donc l'ultracontractivité du semi groupe, ce qui à l'aide de résultats de Davies et de Bakry conduit à la compacité et à une borne supérieure du diamètre. Ces résultats de compacité ont été étudiés de manière plus générale dans [BG17a] et [BB12]. Dans [BB12] théorème 3.10 on a également démontré l'équivalence entre la compacité de l'espace et l'inégalité de log-Sobolev lorsque le critère de courbure dimension généralisé est vérifié avec $\rho_1 \in \mathbb{R}$ et avec le paramètre de dimension d fini. Cette équivalence est due à Saloff-Coste [SC94] dans le cas riemannien et notre preuve est similaire à celle de Ledoux [Led95].

2.7 Inégalités de Poincaré et de log-Sobolev

Dans le cas elliptique, comme rappelé précédemment, il est bien connu (théorème 2.6) que la courbure strictement positive dans le critère de Bakry-Emery implique des inégalités de Poincaré et de log-Sobolev pour la mesure invariante du semi-groupe. Nous allons donc considérer dans un premier temps que l'opérateur L vérifie le critère de courbure dimension généralisé avec $\rho_1 > 0$ et $d = +\infty$.

Nous discuterons dans cette section des exemples symétriques et des exemples symétriques.

Pour les exemples non symétriques décrits ci-dessous et notamment pour les semi-groupes d'Orstein-Uhlenbeck sur les groupes de Carnot, on obtient naturellement un critère de courbure-dimension un tout petit peu amélioré :

$$\Gamma_2(f) + \varepsilon\Gamma_2^Z(f) \geq \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\varepsilon}\right)\Gamma(f) + (\rho_2 + \rho_3\varepsilon)\,\Gamma^Z(f).$$

Ceci permettra d'améliorer légèrement les constantes. Dans ce cas dans [BBC19], on introduira pour $\varepsilon > \frac{\rho_1}{\kappa}$:

$$\lambda_\varepsilon = \min\left\{\rho_1 - \frac{\kappa}{\varepsilon}, \frac{\rho_2}{\varepsilon} + \rho_3\right\}.$$

Dans le cas où $\rho_3 = 0$, ce minimum est atteint en $\varepsilon = \frac{\kappa+\rho_2}{\rho_1}$ et vaut : $\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa+\rho_2}$.

On obtient alors la borne de gradient

Proposition 2.11. *[BG17a, BB12]*
Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Pour $x \in \mathcal{M}$, et $t \geq 0$ on a :

$$(P_tf)\Gamma(\ln P_tf) + \frac{\kappa+\rho_2}{\rho_1}(P_tf)\Gamma^Z(\ln P_tf) \leq e^{-2\frac{\rho_1\rho_2 t}{\kappa+\rho_2}}\left(P_t(f\Gamma(\ln f)) + \frac{\kappa+\rho_2}{\rho_1}P_t(f\Gamma^Z(\ln f))\right)$$

Pour montrer ce résultat on peut considérer l'opérateur carré du champ elliptique : $\Gamma^\varepsilon = \Gamma + \varepsilon\Gamma^Z$ et le Γ_2^ε associé défini similairement à (2.11) et vérifier que

$$\Gamma_2^\varepsilon \geq \min\left\{\rho_1 - \frac{\kappa}{\varepsilon}, \frac{\rho_2}{\varepsilon}\right\}\Gamma^\varepsilon.$$

Le résultat s'obtient alors facilement à partir du formalisme Γ_2 du théorème 2.8 en choisissant :

$$b(t) = e^{-\frac{2\rho_1\rho_2 t}{\kappa+\rho_2}},\; a(t) = -\frac{b'(t)}{2\rho_2} \text{ et } \gamma = 0.$$

On en déduit également le résultat plus faible mais qui reste valable si l'hypothèse (H.2) n'est pas satisfaite.

Proposition 2.12. *[BG17a, BB12]*

Soit $f \in L^2(\mathcal{M})$ telle que $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ et $\Gamma(f), \Gamma^Z(f) \in L^1(\mathcal{M})$. For $x \in \mathcal{M}$, $t \geq 0$ on a :

$$\Gamma(P_t f) + \frac{\kappa+\rho_2}{\rho_1}\Gamma^Z(P_t f) \leq e^{-2\frac{\rho_1\rho_2 t}{\kappa+\rho_2}} \left(P_t(\Gamma(f)) + \frac{\kappa+\rho_2}{\rho_1} P_t(\Gamma^Z(f)) \right)$$

De manière classique, on retrouve alors les inégalités de Poincaré et de log Sobolev modifiée suivantes.

Théorème 2.13. *[BB12]*

Supposons que L soit symétrique et vérifie le critère de courbure-dimension généralisé $\mathrm{CD}(\rho_1, \rho_2, \kappa, \infty)$ avec $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ et $\kappa \geq 0$.

— *La mesure μ est finie et l'inégalité de Poincaré suivante est satisfaite :*

$$\int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathcal{M}} f d\mu \right)^2 \leq \frac{\kappa+\rho_2}{\rho_1\rho_2} \int_{\mathcal{M}} \Gamma(f) d\mu, \quad f \in \mathcal{D}(L).$$

— *Si μ est de masse totale 1, alors pour tout $f \in C_0(\mathcal{M})$,*

$$\int_{\mathcal{M}} f^2 \ln f^2 d\mu - \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \ln \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \leq \frac{2(\kappa+\rho_2)}{\rho_1\rho_2} \left(\int_{\mathcal{M}} \Gamma(f) d\mu + \frac{\kappa+\rho_2}{\rho_1} \int_{\mathcal{M}} \Gamma^Z(f) d\mu \right).$$

La preuve se fait à l'aide la représentation suivante de l'entropie en interpolant à l'aide du semi-groupe (voir (4.68) pour la variance) : Pour $f \in \mathcal{A}_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}_\mu(f) &= \int_{\mathcal{M}} f \ln f d\mu - \int_{\mathcal{M}} f d\mu \ln \int_{\mathcal{M}} f d\mu = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{M}} P_t f \ln P_t f d\mu dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{M}} L P_t f \ln P_t f d\mu dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{M}} P_t f \, \Gamma(\ln P_t f) d\mu dt \end{aligned} \tag{2.21}$$

Il ne reste alors plus qu'à utiliser l'estimée de sous commutation de la proposition 2.11. L'inégalité de Poincaré ne nécessite pas l'hypothèse (H.2). Dans le cas symétrique, on retrouve l'inégalité de Poincaré avec le vrai opérateur carré du champ sous elliptique grâce à son interprétation spectrale. Dans le cas non symétrique, les résultats précédents restent valables à part pour l'inégalité de Poincaré que l'on arrive à démontrer simplement avec le gradient elliptique dans l'énergie. Voici également les convergences quantitatives dans L^2 et entropiques obtenues dans le cas non symétrique :

Proposition 2.14. *[BBC19]*

Soit $t \geq \frac{1}{2\lambda_\varepsilon}$ et $C := e\left(1 + \frac{2\lambda_\varepsilon \varepsilon}{\rho_2}\right)\left(1 + \frac{2\kappa}{\rho_2}\right)$.

Soit $f \in L^2(\mu)$, alors

$$\left\| Q_t f - \int_{\mathcal{M}} f d\mu \right\|_{L^2(\mu)}^2 \leq C e^{-2\lambda_\varepsilon t} \left\| f - \int_{\mathcal{M}} f d\mu \right\|_{L^2(\mu)}^2$$

Soit $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ telle que $f > 0$, alors

$$\mathrm{Ent}_\mu(Q_t f) \leq C e^{-2\lambda_\varepsilon t} \mathrm{Ent}_\mu(f).$$

Une des difficultés dans le cas non symétrique avant d'obtenir ces estimées quantitatives, est de montrer, a priori, la convergence dans L^2 ou en entropie du semi-groupe. Cela se fait assez facilement pour le cas L^2 grâce à la proposition 2.12. C'est plus difficile pour l'entropie. On utilise des techniques basées sur l'inégalité de log-Sobolev inverse. Elles nécessitent une intégrabilité exponentielle du carré de la distance. Elles seront expliquées plus en détails dans la partie 2.8 : voir (2.23) ci-dessous.

Dans le cadre riemannien, le critère de courbure dimension s'applique également pour les opérateurs de diffusion de la forme Laplacien plus dérive. Comme dit précédemment, le premier exemple d'un tel est l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck : $\Delta - x \cdot \nabla$ associé à la gaussienne sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie le critère de Bakry-Emery $CD(1, \infty)$. Il est donc naturel de vouloir étudier ce genre d'opérateurs dans un cadre sous-elliptique. La gaussienne correspond au noyau de la chaleur du Laplacien euclidien, il est donc naturel de considérer le noyau de la chaleur p_t sous elliptique comme la généralisation de la gaussienne et de considérer l'opérateur (voir [BHT08])

$$\Delta_{\mathcal{H}} - \nabla_{\mathcal{H}} \ln p_{\frac{1}{2}} \cdot \nabla_{\mathcal{H}}.$$

Le noyau de la chaleur étant donné par une intégrale oscillante, la formule de Gaveau, cet opérateur n'est pas bien adapté d'un point de vue d'un critère de courbure. Il va être plus intéressant de considérer $\Delta_{\mathcal{H}} - 2D$ avec D le champ de vecteur de dilatation. Cet opérateur n'est plus symétrique, mais admet encore $p_{\frac{1}{2}}$ comme mesure invariante [LP10]. Il admet cependant un bon critère de courbure-dimension permettant de montrer les convergences exponentielles dans L^2 et entropiques ci-dessus [BBC19].

Nous avons également montré que le critère de courbure dimension généralisé s'applique de façon naturelle dans le cadre plus général des sous Laplaciens sur les feuilletages riemanniens décrits précédemment avec une dérive dont la partie horizontale est basique [BBC19]. Notons cependant la formule de Mehler qui décrit le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck Q_t, sur les groupes groupes de Carnot comme un changement de temps du semi-groupe de la chaleur P_t associé au sous Laplacien :

$$Q_t(f)(x) = P_{1-e^{-2t}}(f)\,(\mathrm{Dil}_{e^{-t}} x) \tag{2.22}$$

avec Dil l'opérateur de dilatation sur les groupes de Carnot.

Cette formule permet de montrer, au moins dans le cas des groupes de type H, qu'une inégalité de type H.Q. Li est valable et de retrouver l'inégalité de Poincaré et de log-Sobolev pour le noyau de la chaleur. Pour le moment, nous ne savons pas démontrer ce type de résultat juste à partir du critère de courbure-dimension généralisé.

2.8 L'inégalité de Wang-Harnack et l'inégalité de log-Sobolev

Dans cette partie, nous allons nous intéressé à la généralisation au cadre sous elliptique d'un résultat de F. Y. Wang [Wan97a] obtenu pour les variétés riemaniennes. Ce résultat établit l'inégalité de log-Sobolev dans le cadre symétrique avec une courbure minorée et une intégrabilité exponentielle du carré de la distance.

Théorème 2.15. *[BB12]*

Soit L un opérateur de diffusion symétrique. Supposons que sa mesure réversible μ est une mesure de probabilité et qu'il vérifie le critère de courbure-dimension généralisé $\mathrm{CD}(\rho_1, \rho_2, \kappa, \infty)$ *avec $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_2 > 0$, $\kappa \geq 0$. Supposons de plus*

$$\int_{\mathcal{M}} e^{\lambda d^2(x_0,x)} d\mu(x) < +\infty,$$

pour un certain $x_0 \in \mathcal{M}$ et $\lambda > \frac{\rho_1^-}{2}$, alors il existe une constante $\rho_0 > 0$ telle que pour toute $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$,

$$\int_{\mathcal{M}} f^2 \ln f^2 d\mu - \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \ln \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \leq \frac{2}{\rho_0} \int_{\mathcal{M}} \Gamma(f) d\mu.$$

Le premier ingrédient pour démontrer ce résultat est l'inégalité de log-Sobolev inverse :

Proposition 2.16. *[BG17a, BB12]*

Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Soit $x \in \mathcal{M}$, $t > 0$ on a

$$tP_tf(x)\Gamma(\ln P_tf)(x) + \rho_2 t^2 P_tf(x)\Gamma^Z(\ln P_tf)(x) \leq \left(1 + \frac{2\kappa}{\rho_2} + 2\rho_1^- t\right)\left[P_t(f\ln f)(x) - P_tf(x)\ln P_tf(x)\right].$$

Cette inégalité se démontre à partir du critère de courbure-dimension généralisé et du théorème 2.8. L'idée est de choisir $\gamma = 0$ et a et b

$$b' + 2\rho_2 a = 0,\ a' + 2\rho_1 a - 2\kappa\frac{a^2}{b} \geq C$$

avec C une constante indépendante de t. La fonction $b(t) = (T-t)^2$ convient. On utilise également le fait suivant :

$$P_t(f\ln f)(x) - P_tf(x)\ln P_tf(x) = \int_0^t \Phi_1(s) ds.$$

Une conséquence importante de cette inégalité de log-Sobolev inverse a été remarquée par F.Y. Wang [Wan97a] dans le cadre riemannien.

Proposition 2.17. *Soit $\alpha > 1$ et $f \in L^\infty(\mathcal{M})$, $f \geq 0$, $t > 0$, $x, y \in \mathcal{M}$,*

$$(P_tf)^\alpha(x) \leq P_t(f^\alpha)(y) \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{1 + \frac{2\kappa}{\rho_2} + 2\rho_1^- t}{4t}\right) d^2(x,y)\right).$$

Le cas limite $\alpha \to \infty$ produit l'inégalité de log-Harnack suivante :

Proposition 2.18. *Pour* $f \in L^\infty(\mathcal{M})$, $\inf f > 0$, $t > 0$, $x, y \in \mathcal{M}$,

$$P_t(\ln f)(x) \le \ln P_t(f)(y) + \left(\frac{1 + \frac{2\kappa}{\rho_2} + 2\rho_1^- t}{4t} \right) d^2(x, y).$$

La condition d'intégrabilité

$$\int_{\mathcal{M}} e^{\lambda d^2(x_0, x)} d\mu(x) < +\infty,$$

pour un $x_0 \in \mathcal{M}$ et $\lambda > \frac{\rho_1^-}{2}$ implique alors la supercontractivité du semi groupe $(P_t)_{t \ge 0}$: il existe $1 < \alpha < \beta$, $t > 0$ et une constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tels que ;

$$\|P_t f\|_{L^\beta} \le C_{\alpha,\beta} \|f\|_{L^\alpha}.$$

Dans le cadre symétrique, ceci implique par le théorème de Gross (voir par exemple [Bak94]) une inégalité de log Sobolev non tendue, il existe $A, B > 0$ telle que

$$\int_{\mathcal{M}} f^2 \ln f^2 d\mu - \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \ln \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \le A \int_{\mathcal{M}} \Gamma(f) d\mu + B \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu, \quad f \in C_0^\infty(\mathcal{M}).$$

La preuve de ce résultat résultat utilise le théorème d'interpolation complexe de Stein et le fait que dans le cas symétrique, par construction $\|P_{is}\|_{2,2} = 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Maintenant, le noyau de la chaleur étant positif et la mesure réversible une mesure de probabilité, il vérifie la propriété UPIP (d'amélioration de la positivité uniforme). L'inégalité de log-Sobolev non tendue implique alors un trou spectral (see [Aid98], Theorem 2.11) ce qui finalement comme remarqué par Rothaus, redonne l'inégalité de log-Sobolev usuelle.

Dans le cas non symétrique (voir [Wan97a]), on peut tout d'abord montrer que pour t assez grand : $\|P_t\|_{\alpha,\beta} = 1$, puis en utilisant le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin une décroissance exponentielle de l'entropie : il existe $T_2 > 0$ tel que pour tout $t > 0$,

$$\mathrm{Ent}_\mu(P_t f) \le \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{t}{T_2}} \mathrm{Ent}_\mu(f). \tag{2.23}$$

2.9 Une borne de l'entropie par la distance :

Le résultat suivant est une généralisation du lemme 4.2 dans [BGL01] (voir aussi [OV01] pour une preuve alternative plus orientée PDE). Il s'agit d'un lemme clé permettant de remontrer l'inégalité HWI (théorème 4.3 dans [BGL01]). On suppose ici que μ est une mesure de probabilité.

Proposition 2.19. *[BB12]*

Supposons que L vérifie le critère de courbure dimension généralisé $\mathrm{CD}(\rho_1, \rho_2, \kappa, \infty)$ *avec $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_2 > 0$, $\kappa \geq 0$. Soit f une fonction positive sur $\mathcal{M}$ telle que $\int_{\mathcal{M}} f d\mu = 1$ et posons $d\nu = f d\mu$. Alors pour tout $t > 0$,*

$$\mathrm{Ent}_\mu(P_t f) \leq \left(\frac{1 + \frac{2\kappa}{\rho_2} + 2\rho_1^- t}{4t} \right) \mathcal{W}_2(\mu, \nu)^2.$$

avec $\mathcal{W}_2$ la distance de Wasserstein associée à la distance sous elliptique.

La preuve est basée sur l'inégalité de log-Harnack appliqué à la fonction $P_t f$:

$$P_t(\ln P_t f)(x) \leq \ln P_{2t}(f)(y) + \frac{1}{s} d^2(x, y) \text{ avec } s = \frac{4t}{1 + \frac{2\kappa}{\rho_2} + 2\rho_1^- t}.$$

Pour x fixé, en prenant l'infimum en y,

$$P_t(\ln P_t f)(x) \leq Q_s(\ln P_{2t} f)(x)$$

avec Q_s le semi-groupe d'infimum-convolution

$$Q_s(\phi)(x) = \inf_{y \in \mathcal{M}} \left\{ \phi(y) + \frac{1}{2s} d(x, y)^2 \right\}.$$

Par Jensen, pour $\phi = \ln P_{2t} f$, on a $\int_{\mathcal{M}} \phi d\mu \leq 0$, d'où en utilisant également la symétrie de P_t,

$$\mathrm{Ent}_\mu(P_t f) = \int_{\mathcal{M}} f P_t(\ln P_t f) d\mu \leq \sup_\psi \left\{ \int_{\mathcal{M}} Q_s(\psi)(x) d\nu - \int_{\mathcal{M}} \psi d\mu \right\}.$$

La dualité de Monge-Kantorovich nous dit maintenant que ce supremum est en fait la distance de Wasserstein associé au coût $c(x, y) = \frac{1}{s} d^2(x, y)$.

On peut alors proposer une inégalité HWI modifiée ainsi qu'une réciproque partielle similaire au corollaire 4.3 de [BGL01] (voir théorème 4.3 [BB12]) mais avec un gradient sous elliptique.

Théorème 2.20. *[BB12]*

Supposons que L vérifie le critère de courbure dimension généralisé $\mathrm{CD}(\rho_1, \rho_2, \kappa, \infty)$ *avec $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_2 > 0$, $\kappa \geq 0$. Supposons également que l'inégalité de transport quadratique*

$$\mathcal{W}_2(\mu, \nu)^2 \leq c \mathrm{Ent}_\mu \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right) \tag{2.24}$$

soit satisfaite pour toute mesure de probabilité ν avec une constante $c < \frac{2}{\rho_1^-}$, Alors l'inégalité de log-Sobolev modifiée

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \leq C_1 \int_{\mathcal{M}} \frac{\Gamma(f)}{f} d\mu + C_2 \int_{\mathcal{M}} \frac{\Gamma^Z(f)}{f} d\mu, \quad f \in \mathcal{A}_\varepsilon, \varepsilon > 0,$$

est valable pour des constantes C_1 et C_2 ne dépendant seulement que de $c, \rho_1, \kappa, \rho_2$.

2.10 Inégalités isopérimétriques

Dans le cadre riemannien Varopoulos [Var89] et Ledoux [Led96] ont montré qu'à partir de l'inégalité de Li-Yau, on peut obtenir des inégalités isopérimétriques.

Dans cette section, nous montrons comment ces techniques peuvent s'appliquer dans le cadre sous elliptique.

Le premier point consiste à obtenir une inégalité de Poincaré L_1 :

Lemme 2.21. *Supposons que L vérifie le critère de courbure dimension généralisé* $\mathrm{CD}(\rho_1, \rho_2, \kappa, \infty)$*, let $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$. Alors pour tout $t > 0$ et toute f*

$$\|f - P_t f\|_1 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{\rho_2} + \rho_1^- t \right) \sqrt{t} \| \sqrt{\Gamma(f)} \|_1. \tag{2.25}$$

Le lemme précédent peut s'obtenir à partir directement à partir des estimées de type Li-Yau ou à partir de l'inégalité de Poincaré inverse et d'un argument de dualité. L'idée développée par Varopoulos et Ledoux consiste à appliquer le lemme ci-dessus pour $f = \mathbf{1}_A$:

$$\|\mathbf{1}_A - P_t \mathbf{1}_A\|_1 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{\rho_2} + \rho_1^- t \right) \sqrt{t} P(A).$$

avec $P(A)$ le périmètre du sous ensemble A. Nous renvoyons ici à [GN96] pour une définition précise du périmètre sous riemannien. En utilisant la symétrie et la complétude stochastique du semi-groupe, on peut montrer que

$$\|\mathbf{1}_A - P_t \mathbf{1}_A\|_1 \quad = \quad 2 \left(\mu(A) - \|P_{\frac{t}{2}}(\mathbf{1}_A)\|_2^2 \right).$$

Il nous reste donc à majorer $\|P_{\frac{t}{2}}(\mathbf{1}_A)\|_2^2$. Cela peut se faire à l'aide de l'ultracontractivité du semi-groupe. Celle-ci peut s'obtenir également à partir de l'inégalité de Li-Yau et de la borne supérieure (2.27). Des résultats isopérimétriques sont alors obtenus pour les espaces modèles $\mathbb{H}, SU(2, \mathbb{R})$ et $SL(2, \mathbb{R})$ dans ma thèse [0]. Dans le cas de la courbure négative, les résultats ne semblent pas optimaux (voir [CY09]). Voir également le travail [BK14] dans le cas $\rho_1 \geq 0$ et sous une condition de croissance du volume des boules.

Lorsque l'inégalité de log-Sobolev est vérifiée, on peut utiliser l'hypercontractivité du semi-groupe et déduire similairement à Ledoux [Led94] :

Théorème 2.22. *[BB12]*

Supposons que l'opérateur L vérifie le critère de courbure dimension $\mathrm{CD}(\rho_1, \rho_2, \kappa, \infty)$ *et que μ vérifie l'inégalité de log-Sobolev :*

$$\int_{\mathcal{M}} f^2 \ln f^2 d\mu - \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \ln \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \leq \frac{2}{\rho_0} \int_{\mathcal{M}} \Gamma(f) d\mu, \tag{2.26}$$

pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$. Soit A un sous ensemble de la variété $\mathcal{M}$ de périmètre $P(A)$ fini et tel que $0 \leq \mu(A) \leq \frac{1}{2}$, alors

$$P(A) \geq \frac{\ln 2}{4\left(3+\frac{2\kappa}{\rho_2}\right)} \min\left(\sqrt{\rho_0}, \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_1^-}}\right) \mu(A) \left(\ln \frac{1}{\mu(A)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La constante $\frac{\ln 2}{4\left(3+\frac{2\kappa}{\rho_2}\right)}$ n'est bien sûr pas optimale mais contrairement au résultat dans [Led94], elle ne dépend pas de la dimension. Cela provient du fait que nous avons utilisé l'inégalité de Poincaré inverse au lieu de l'inégalité de Li-Yau pour obtenir l'estimée 2.21.

2.11 Propriétés du doublement de la mesure et comparaisons de distance

La géométrie sous-elliptique a d'abord été étudiée d'un point de vue local. Dans un papier fondamental, Nagel, Stein and Wainger [NSW85] ont notamment obtenu des estimées locales de doublement de la mesure ainsi que des comparaisons locales, de la distance sous elliptique et d'une distance riemannienne $d_\mathcal{T}$. Une inégalité de Poincaré locale sur les boules a été obtenue par Jerison [Jer86]. Des estimées gaussiennes et des inégalités de Harnack non globales ont également été obtenues par Jerison et Sanchez-Calle [JSC87] ainsi que par Kusuoka et Stroock [KS87].

Le but de cette partie est démontrer que dans le cas où la courbure généralisée d'un sous Laplacien est minoré, des estimées globales ont lieu. Dans le cas d'une courbure positive ou nulle , on obtient la propriété de doublement de la mesure globale. Pour simplifier la présentation, on commencera à discuter seulement le cas $\rho_1 \geq 0$. Il est ici fondamental d'avoir le paramètre de dimension d dans le critère de courbure généralisée fini.

Théorème 2.23 (Propriété du doublement de la mesure)**.** *[BBG14]*

Soit L un sous-Laplacien vérifiant le critère $\mathrm{CD}(0, \rho_2, \kappa, d)$. *Alors l'espace métrique mesuré* $(\mathbb{M}, d, \mu)$ *vérifie la propriété globale de doublement de la mesure : il existe une constante $C_1 = C_1(\rho_2, \kappa, d) > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{M}$ et tout $r > 0$,*

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_1 \mu(B(x, r)).$$

Ce théorème est une version faible du théorème riemannien de Bishop-Gromov, qui peut -être obtenu grâce à l'étude de champs de Jacobi . Le point crucial de la preuve est l'obtention du théorème 2.26. La suite de la preuve proviendra alors d'argument bien connus mais néanmoins rappelés ci-dessous. Dans [BG11], Baudoin et Garofalo ont proposé une preuve analytique basée sur le noyau de la chaleur mais plus simple du théorème 2.26.

Le théorème suivant donne des comparaisons globales des distances sous riemannienne et riemannienne. Elles seront obtenues grâce à des bornes supérieure et inférieures gaussiennes du noyau de la chaleur.

Théorème 2.24. *[BB13]*

Supposons que L vérifie le critère de courbure dimension $\mathrm{CD}(0, \rho_2, \kappa, d)$ *alors il existe 2 constantes $A, B > 0$ dépendant seulement de ρ_2, κ, d telles que pour tout $x, y \in \mathcal{M}$, et tout $\tau \geq 0$*

$$d_\tau(x,y) \leq d(x,y) \leq A d_\tau(x,y) + B\sqrt{\tau} d_\tau(x,y)^{1/2}$$

avec d_τ la distance (en générale riemannienne) associée à l'opérateur $\Gamma + \tau^2 \Gamma^Z$.

Les inégalités de Harnack sont reliées de manière très forte à des estimées du noyau de la chaleur. Ces estimées sont reliées elle-même au volume des boules et vont nous permettre d'obtenir des résultats sur ces volumes.

De manière directe, en intégrant l'inégalité de Harnack sur une boule en y de rayon $\sqrt{t}$, on obtient dans le cas $\rho_1 \geq 0$:

$$p_t(x,x) \leq \frac{C}{\mu(B(x, \sqrt{t}))}. \tag{2.27}$$

Il est en fait classique à partir de l'inégalité de Harnack d'obtenir des bornes supérieures gaussiennes.

Dans le cas $\rho_1 \geq 0$, on obtient que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ il existe une constante $C(d, \kappa, \rho_2, \varepsilon) > 0$, qui tend vers l'infini quand $\varepsilon \to 0^+$, et telle que pour tout $x, y \in \mathcal{M}$ et $t > 0$ on a

$$p(x,y,t) \leq \frac{C(d,\kappa,\rho_2,\varepsilon)}{\mu(B(x,\sqrt{t}))^{\frac{1}{2}} \mu(B(y,\sqrt{t}))^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{d(x,y)^2}{(4+\varepsilon)t}\right). \tag{2.28}$$

L'idée est d'utiliser le lemme d'Aronson suivant :

Lemme 2.25. *Soit $g(t,x)$ une fonction telle que*

$$\partial_t g + \frac{1}{2}\Gamma(g,g) \leq 0$$

et f une fonction positive. Alors la quantité $\int_{\mathcal{M}} e^{g(t,y)} (P_t f(y))^2 d\mu(y)$ est décroissante en t. En particulier :

$$\int_{\mathcal{M}} e^{g(t,y)} (P_t f(y))^2 d\mu(y) \leq \int_{\mathcal{M}} e^{g(0,y)} f(y)^2 d\mu(y).$$

Intéressons nous maintenant aux bornes inférieures du noyau de la chaleur. Dans l'inégalité de Harnack, puisque la dimension D n'est pas optimale, nous ne pouvons pas utiliser que $(4\pi s)^{N/2} p_s(x,x) \to 1$ quand $s \to 0$. Il ne semble pas non plus facile de généraliser le théorème 4.1 de Li-Yau [LY86].

Néanmoins, nous avons réussi à obtenir le résultat suivant.

Théorème 2.26. *[BBG14]*
Il existe une constante $0 < A < 1$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{M}$ *et* $r > 0$*,*

$$P_{Ar^2}(\mathbf{1}_{B(x,r)})(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Grâce à l'inégalité de Harnack du théorème 2.10 et à Cauchy-Schwarz, on obtient la borne inférieure sur la diagonale :

$$p(x,x,2r^2) \geq \frac{C^*}{\mu(B(x,r))}, \qquad x \in \mathcal{M},\ r > 0. \tag{2.29}$$

Or par Harnack et (2.27),

$$p(x,x,2r^2) \leq 2^{D/2} p(x,x,4r^2) \leq \frac{C'}{\mu(B(x,2r))}. \tag{2.30}$$

La propriété du doublement de la mesure est une conséquence immédiate de (2.27) et (2.30) .

Cette minoration sur la diagonale et la propriété du doublement de volume permette d'obtenir les bornes supérieures et inférieures gaussiennes :

Théorème 2.27. *Pour tout* $0 < \varepsilon < 1$*, il existe* $C(\varepsilon) = C(d,\kappa,\rho_2,\varepsilon) > 0$*, qui tend vers l'infini quand* $\varepsilon \to 0^+$ *et telle que pour tout* $x, y \in \mathcal{M}$ *et* $t > 0$ *on a :*

$$\frac{C(\varepsilon)^{-1}}{\mu(B(x,\sqrt{t}))} \exp\left(-\frac{Dd(x,y)^2}{d(4-\varepsilon)t}\right) \leq p(x,y,t) \leq \frac{C(\varepsilon)}{\mu(B(x,\sqrt{t}))} \exp\left(-\frac{d(x,y)^2}{(4+\varepsilon)t}\right).$$

La preuve du théorème 2.26 n'est pas immédiate. Elle est basée sur l'inégalité dimensionnelle de log-Sobolev inverse.

Théorème 2.28. *[BBG14]*
Soit $\varepsilon > 0$ *et* $f \in \mathcal{A}_\varepsilon$*. Pour tout* $C \geq 0$ *et* $\delta > 0$*, on a pour tout* $x \in \mathcal{M}$ *et* $t > 0$*,*

$$\begin{aligned} &\frac{t}{\rho_2} P_t f(x) \Gamma(\ln P_t f)(x) + t^2 P_t f(x) \Gamma^Z(\ln P_t f)(x) \\ &\leq \frac{1}{\rho_2}\left(1 + \frac{2\kappa}{\rho_2} + \frac{4C}{d}\right)\left[P_t(f \ln f)(x) - P_t f(x) \ln P_t f(x)\right] \\ &- \frac{4C}{\rho_2 d}\frac{t}{1+\delta} L P_t f(x) + \frac{2C^2}{d\rho_2} \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) P_t f(x). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Cette inégalité dimensionnelle de log-Sobolev inverse implique une inégalité différentielle pour le semi-groupe.

Proposition 2.29. *[BBG14]*

Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{A}_\varepsilon$, $0 \leq f \leq 1$. Soit $u(x,t) = \sqrt{-\ln P_t f(x)}$. Alors

$$2tu_t + u + \left(1 + \sqrt{\frac{D^*}{2}}\right) u^{1/3} + \sqrt{\frac{D^*}{2}} u^{-1/3} \geq 0,$$

avec $D^* = d\left(1 + \frac{2\kappa}{\rho_2}\right)$.

Par conséquent,

Corollaire 2.30. *[BBG14]*
Soit $f \in L^\infty(\mathcal{M})$, $0 \leq f \leq 1$. Pour tout $x \in \mathcal{M}$ et $0 < s < t$,

$$G\left(\sqrt{-\ln P_t f(x)}\right) \geq G\left(\sqrt{-\ln P_s f(x)}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t}{s}\right).$$

avec G est une fonction strictement croissante telle que $G(0) = 0$ et

$$G(u) = \ln u + C_0 + R(u), \ \lim_{u \to \infty} R(u) = 0. \tag{2.32}$$

Pour pouvoir utiliser cette inégalité différentielle, on a besoin de connaître le comportement du membre de droite lorsque $s \to 0$. Pour cela il suffit d' établir des asymptotiques suivantes en temps petit. Grâce à l'inégalité de Harnack, on obtient

Proposition 2.31. *[BBG14]*
Soit $x \in \mathcal{M}$ et $r > 0$. Posons $f = \mathbf{1}_{B(x,r)^c}$. On a

$$\liminf_{s \to 0^+} (-s \ln P_s f(x)) \geq \frac{r^2}{4}.$$

Finalement, pour ce choix de fonction f, on peut faire tendre s vers 0 pour obtenir :

$$G\left(\sqrt{-\ln P_t \mathbf{1}_{B(x,r)^c}(x)}\right) \geq \ln \frac{r}{\sqrt{t}} + C_0^*. \tag{2.33}$$

On déduit alors facilement de (2.33) l'estimée cruciale du théorème 2.26.

Il est maintenant bien connu voir par exemple le livre [Gri09] et les références dedans que dans le contexte des formes de Dirichlet régulières, on a équivalence entre

(1) Des estimées supérieures et inférieures du noyau de la chaleur gaussiennes du théorème 2.27) ;

(2) La conjonction de la propriété de doublement de la mesure et de l'inégalité de Poincaré sur les boules : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathcal{M}$ et tout $r > 0$,

$$\int_{B(x,r)} |f(y) - f_r|^2 d\mu(y) \leq Cr^2 \int_{B(x,r)} \Gamma(f)(y) d\mu(y). \tag{2.34}$$

(3) une inégalité parabolique globale de Harnack (voir théorème 5.4 dans [BBG14]).

Venons en maintenant aux comparaisons entre la distance sous elliptique et des distances riemanniennes. Pour cela, on introduit une famille de distance d_τ, $\tau \geq 0$. Cette distance est associée à la forme bilinéaire $\Gamma + \tau^2 \Gamma^Z$. Le bon concept permettant de définir la distance est de définir les courbes sous-unités : i.e. les courbes γ telles que pour toute fonction lisse $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, on a $\left|\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right| \leq \sqrt{(\Gamma + \tau^2 \Gamma^Z, f)(\gamma(t))}$.

On définit alors de manière naturelle la longueur d'une telle courbe puis la distance entre 2 points comme l'infimum des longueurs de courbes sous-unités entre ces poins. Pour $\tau = 0$, on a $d_0(x,y) = d_{cc}(x,y)$ et on a clairement :

$$d_\tau(x,y) \leq d_{cc}(x,y)$$

L'inégalité de Li-Yau contrôle en fait un gradient elliptique. De manière directe, à partir du Théorème 2.9, on obtient :

$$\left(1 + \frac{3\tau^2}{2\rho_2 t}\right)^{-1} \left(\Gamma\left(\ln P_t f\right) + \tau^2 \Gamma^Z\left(\ln P_t f\right)\right) \leq \left(\frac{D}{d}\right) \frac{L P_t f}{P_t f} + \frac{D^2}{2dt}. \tag{2.35}$$

En intégrant le long des géodésiques de d_τ on obtient une inégalité de Harnack pour d_τ et la minoration suivante du noyau de la chaleur :

$$p(x,y,t) \geq \frac{C}{\mu\left(B\left(x, \sqrt{t}\right)\right)} \exp\left(-\frac{d_\tau\left(x,y\right)^2}{2t} \left(\frac{D}{d} + \frac{2\tau^2}{t}\left(\frac{3D}{2\rho_2 d} \ln(2)\right)\right)\right). \tag{2.36}$$

Par symétrie du noyau de la chaleur, on peut remplacer $\mu\left(B\left(x, \sqrt{t}\right)\right)$ par $\mu\left(B\left(x, \sqrt{t}\right)\right)^{1/2} \mu\left(B\left(x, \sqrt{t}\right)\right)^{1/2}$. Le théorème 2.24 s'obtient alors comparant cette borne inférieure (2.36) avec la borne supérieure (2.28) et en utilisant qu'elle est valable pour tout $t > 0$.

Dans le cas où on suppose juste que la courbure est minorée, les arguments précédents s'appliquent aussi. Les résultats finaux sont :

Théorème 2.32. *[BBGM14]*

Supposons que le critère de courbure dimension soit vérifié avec $\rho_1 \in \mathbb{R}$ et d fini. Alors il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$, dépendant seulement de $\rho_1, \rho_2, \kappa, d$ telles que pour tout $x, y \in \mathcal{M}$ et $r > 0$:

$$\mu(B(x,2r)) \leq \; C_1 \exp\left(C_2 r^2\right) \mu(B(x,r)); \tag{2.37}$$

Tout comme pour l'isopérimétrie en courbure négative, le facteur $\exp\left(C_2 r^2\right)$ *n'est sans doute pas optimal.*

Théorème 2.33. *[BBGM14]*

Supposons que le critère de courbure dimension soit vérifié avec $\rho_1 \in \mathbb{R}$ et d fini. Soit $\tau \geq 0$. Il existe une constante $C(\tau) > 0$, dépendant seulement de $\rho_1, \rho_2, \kappa, d$ et de τ telle que pour tout $x, y \in \mathcal{M}$:

$$d\,(x,y) \leq C(\tau) \max\{\sqrt{d_\tau\,(x,y)}, d_\tau\,(x,y)\}. \tag{2.38}$$

Ces résultats s'obtiennent une fois que l'on a montré :

Théorème 2.34. *[BBGM14]*

On a

$$P_{A(r)r^2}\left(\mathbf{1}_{B(x,r)}\right)(x) \geq \frac{1}{2}.$$

avec $A(R)$ une fonction décroissante de $\sqrt{d\rho_1^-}R$ telle que :

$$\begin{cases} A(R) \sim C \textit{ if } \sqrt{d\rho_1^-}R \textit{ is small} \\ A(R) \geq \frac{C'}{d\rho_1^- R^2} \textit{ if } \sqrt{d\rho_1^-}R \textit{ is big} \end{cases} \tag{2.39}$$

Au niveau des estimées du noyau de la chaleur, on obtient des estimées mais avec des termes $\exp(\pm C\rho_1^- t)$ supplémentaires.

La propriété de doublement de la mesure est une propriété fondamentale en analyse harmonique, sous laquelle de nombreux résultats ont été établis. Ainsi le théorème remarquable de Liouville de [CM97] sur les fonctions L harmoniques s'applique : dans le cas $\rho_1 \geq 0$, il n'existe pas de solution positive non constante à $Lf = 0$. De manière similaire, Baudoin et Garofalo [BG11] ont montré que les résultats de [ACDH04] s'appliquaient également au cadre sous-riemannien et ont obtenu la bornitude de la transformée de Riesz pour tout $1 < p < \infty$ dans le cas $\rho_1 \geq 0$.

Une autre conséquence intéressante dans le cas $\rho_1 \in \mathbb{R}$ est le théorème de précompacité de Gromov : l'ensemble des variétés sous-riemanniennes vérifiant le critère de courbure dimension est précompact au sens de la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée.

2.12 Etude du Laplacien riemannien à l'aide d'un critère sous riemannien

On présente ici les résultats obtenus dans [BB15]. L'idée va être d'étudier un opérateur de Laplace-Beltrami riemannien à l'aide d'un critère de courbure sous riemannien. On va développer un peu ici le cadre géométrique : On considère $\mathcal{M}$ un feuilletage riemannien avec une métrique de type fibré et des feuilles totalement géodésiques.On note $\mathcal{V}$ le sous fibré *vertical* constitué des vecteurs tangents aux feuilles et $\mathcal{H}$ le fibré horizontal défini comme l'orthogonal à $\mathcal{V}$.

La métrique g se décompose comme :

$$g = g_{\mathcal{H}} \oplus g_{\mathcal{V}},$$

et on introduit la variation canonique de la métrique :

$$g_\varepsilon = g_{\mathcal{H}} \oplus \frac{1}{\varepsilon} g_{\mathcal{V}}, \quad \varepsilon > 0.$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami de la métrique g_ε est donné par :

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_{\mathcal{H}} + \varepsilon \Delta_{\mathcal{V}},$$

Pour obtenir des formules de Böchner, il est plus intéressant de travailler avec une connection adapté à la décomposition précédente. Pour cela, on considère la connection de Bott défini à partir de la connection de Lévi-Civita D par :

$$\nabla_X Y = \begin{cases} (D_X Y)_{\mathcal{H}}, & X, Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{H}) \\ [X, Y]_{\mathcal{H}}, & X \in \Gamma^\infty(\mathcal{V}), Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{H}) \\ [X, Y]_{\mathcal{V}}, & X \in \Gamma^\infty(\mathcal{H}), Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{V}) \\ (D_X Y)_{\mathcal{V}}, & X, Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{V}) \end{cases}$$

Cette connection admet une torsion non nulle qui vaut pour X, Y des champs de vecteurs horizontaux :

$$T(X, Y) = -[X, Y]_{\mathcal{V}}.$$

On suppose ici que le feuilletage est de type Yang-Mills c'est-à-dire que la divergence horizontale de la torsion est nulle. On peut alors calculer le tenseur de Ricci $\mathbf{Ricci}_\varepsilon$ de g_ε :

Lemme 2.35. *Pour $X \in \Gamma^\infty(\mathcal{H})$ et $Z \in \Gamma^\infty(\mathcal{V})$,*

$$\mathbf{Ricci}_\varepsilon(Z, Z) = \mathbf{Ricci}_{\mathcal{V}}(Z, Z) + \frac{1}{4\varepsilon^2} \mathbf{Tr}(J_Z^* J_Z)$$

$$\mathbf{Ricci}_\varepsilon(X, Z) = 0$$

$$\mathbf{Ricci}_\varepsilon(X, X) = \mathbf{Ricci}_{\mathcal{H}}(X, X) - \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{J}X\|^2.$$

Ceci conduit aux formules de Böchner par rapport aux gradients horizontaux et verticaux :

Proposition 2.36. *[BB15]*
Pour tout $f \in C^\infty(\mathcal{M})$,

$$\mathcal{T}_2(f) := \frac{1}{2}\Delta_\varepsilon \|\nabla_\mathcal{H} f\|^2 - \langle \nabla_\mathcal{H} \Delta_\varepsilon f, \nabla_\mathcal{H} f \rangle = \Gamma_2^\mathcal{H}(f) + \varepsilon \|\nabla^2_{\mathcal{V},\mathcal{H}} f\|^2$$

et

$$\frac{1}{2}\Delta_\varepsilon \|\nabla_\mathcal{V} f\|^2 - \langle \nabla_\mathcal{V} \Delta_\varepsilon f, \nabla_\mathcal{V} f \rangle = \varepsilon \|\nabla^2_\mathcal{V} f\|^2 + \varepsilon \mathbf{Ric}_\mathcal{V}(\nabla_\mathcal{V} f, \nabla_\mathcal{V} f) + \|\nabla^2_{\mathcal{H},\mathcal{V}} f\|^2$$

Par conséquent, si on suppose juste les bornes suivantes $X \in \Gamma^\infty(\mathcal{H})$,

$$\mathbf{Ricci}_\mathcal{H}(X, X) \geq \rho_1 \|X\|^2, \quad \|\mathbf{J}X\|^2 \leq \kappa \|X\|^2,$$

on obtient

$$\mathcal{T}_2(f) \geq \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\varepsilon}\right) \|\nabla_\mathcal{H} f\|^2$$

Un point important est que pour ces modèles :

$$\|\nabla^2_{\mathcal{V},\mathcal{H}} f\|^2 \|\nabla^2_{\mathcal{H},\mathcal{V}} f\|^2 \tag{2.40}$$

Le critère obtenu pour $\mathcal{T}_2$ est donc semblable au critère de courbure-dimension sous elliptique.

On en déduit alors une sous commutation entre le semi-groupe P_t^ε de générateur Δ_ε et la norme du gradient sous elliptique ∇_H.

Proposition 2.37. *[BB15]*

$$(P_t^\varepsilon f)\left(\|\nabla_\mathcal{H} \ln P_t^\varepsilon f\|^2\right) \leq e^{-\left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\varepsilon}\right)t} P_t^\varepsilon(f \|\nabla_\mathcal{H} \ln f\|^2). \tag{2.41}$$

On en déduit également une inégalité de log-Sobolev inverse toujours avec le gradient horizontal.

Proposition 2.38. *[BB15]*

$$P_t^\varepsilon f \|\nabla_\mathcal{H} \ln P_t^\varepsilon f\|^2 \leq \frac{\left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\varepsilon}\right)}{e^{\left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\varepsilon}\right)t} - 1} \left(P_t^\varepsilon(f \ln f) - P_t^\varepsilon(f) \ln P_t^\varepsilon(f)\right). \tag{2.42}$$

On obtient alors des inégalités de Wang-Harnack ([BB15] propositions 3.7 et 3.8) puis une inégalité de log-Sobolev ([BB15]théorème 3.10) similaire au théorème 2.15 mais sous la condition d'exponentielle intégrabilité de la distance sous elliptique, ainsi qu'une borne de l'entropie par la distance de Wassertein sous-elliptique ([BB15] proposition 3.12) similaire à la proposition 2.19. Il faut noter ici que l'on n'utilise pas d'hypothèse sur la courbure de Ricci verticale.

Maintenant si on suppose de plus,

$$-\frac{1}{4}\mathbf{Tr}_{\mathcal{H}}(J_{\eta_2}^2) \geq \rho_2\|\eta_2\|_{\mathcal{V}}^2, \quad \langle \mathfrak{Ric}_{\mathcal{V}}(\eta_2), \eta_2\rangle_{\mathcal{V}} \geq \rho_3\|\eta_2\|^2.$$

on obtient un critère de courbure-dimension qui interpole entre le critère usuel de Bakry-Emery pour $\nu = 0$ et le critère de courbure dimension généralisé de Baudoin-Garofalo lorsque $\varepsilon = 0$.

Corollaire 2.39. *[BB15]*
Posons

$$\Gamma_\varepsilon(f) = \|\nabla_{\mathcal{H}} f\|^2 + \varepsilon\|\nabla_{\mathcal{V}} f\|^2$$

$$\Gamma_{2,\varepsilon}(f) = \frac{1}{2}\Delta_\varepsilon \Gamma_\varepsilon(f) - \Gamma_\varepsilon(f, \Delta_\varepsilon f).$$

$$\Gamma_{2,\varepsilon}^{\mathcal{V}}(f) = \frac{1}{2}\Delta_\varepsilon\|\nabla_{\mathcal{V}} f\|^2 - \langle \nabla_{\mathcal{V}} f, \nabla_{\mathcal{V}}\Delta_\varepsilon f\rangle.$$

Pour tout $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, et tout $\nu \geq -\varepsilon$,

$$\Gamma_{2,\varepsilon}(f)+\nu\Gamma_{2,\varepsilon}^{\mathcal{V}}(f) \geq \frac{1}{n+\frac{m\varepsilon}{\nu+\varepsilon}}(\Delta_\varepsilon f)^2+\left(\rho_1 - \frac{\kappa}{2\varepsilon+\nu}\right)\Gamma_\varepsilon(f)+\left(\rho_2 - \rho_1\varepsilon + \frac{\kappa\varepsilon}{2\varepsilon+\nu} + \rho_3\varepsilon(\nu+\varepsilon)\right)\Gamma^{\mathcal{V}}(f).$$

2.13 Perspectives

Beaucoup de résultats obtenus avec le critère de courbure-dimension généralisé découlent de l'inégalité de log-Sobolev inverse. Mais pour le moment, nous ne savons pas comment retrouver l'inégalité de H.Q. Li ni celle de log-Sobolev sous-elliptique simplement à partir du critère de courbure dimension généralisé.

Est-il possible de profiter de formules de type Weizenbock, étudiées actuellement, pour obtenir ces résultats dans un cadre plus général que celui des groupes de Carnot de type H ?

Est-il également possible de faire un lien entre le critère de courbure généralisé et les coefficients de distorsion apparaissant dans les interpolations sous riemanniennes de type Brunn-Minkowski ?

Les questions d'enlever la condition de symétrie ou d'obtenir des résultats pour des variétés sous riemanniennes d'ordre supérieur restent grandement ouverte. Notons néammoins le travail de Wang [Wan12] pour les groupes de Carnot d'ordre supérieur.

Le semi-groupe d'Ornstein-Ulhenbeck sur le groupe de Heisenberg soulève également de nombreuses questions. Il est assez frustrant que du fait de sa non-symétrie, son lien avec les inégalités de transport n'est pas clair. Il est également frustrant qu'on n'arrive pas à utiliser la sous ellipticité de l'opérateur pour effectivement démontrer l'inégalité de log-Sobolev (à part bien sûr en utilisant la formule de Mehler), et qu'on n'arrive pas à le différencier d'un opérateur de type Fokker-Planck cinétique.

Le spectre de l'Ornstein-Ulhenbeck est connu, les vecteurs propres sont des polynômes homogènes. L'opétrateur n'étant pas symétrique, est-il possible d'obtenir au moins l'inégalité de Poincaré à partir de cette décomposition spectrale ?

3 Autres résultats sur les diffusions sous-elliptiques

Dans cette partie, nous allons décrire d'autres résultats obtenus dans le cadre sous-elliptique mais qui ne reposent pas directement sur le critère de courbure dimension généralisé. Ces résultats concernent tous des groupes de Carnot où des calculs explicites peuvent être faits. On rappelle que les groupes de Carnot sont fondamentaux dans les sens où ils correspondent aux "espaces tangents" en géométrie sous-riemannienne.

3.1 Inégalité de Poincaré inverse sur les groupes de Carnot

Dans cette partie, on discute l'inégalité de Poincaré inverse. Comme on l'a vu précédemment, cette inégalité peut s'obtenir comme conséquence du critère de courbure dimension. Ici, on va montrer que dans le cas des groupes de Carnot, on peut l'obtenir directement et donner la valeur de la constante optimale. Ces résultats sont contenus dans [BB16] et font suite aux résultats obtenus pour le groupe de Heisenberg dans [BBBC08]. On rappelle que les groupes de Carnot correspondent aux espaces tangents (au sens de Gromov-Hausdorff) en géométrie sous riemanniennes et qu'ils jouent donc le rôle d'espace de courbure nulle en géométrie sous elliptique. On ne fait pas ici l'hypothèse que le groupe est d'ordre 2.

Un groupe de Carnot d'ordre N est un groupe de Lie $\mathbb{G}$ nilpotent et stratifié [BLU07], i.e. son algèbre de Lie peut s'écrire

$$\mathfrak{g} = \mathcal{V}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{V}_N,$$

avec

$$[\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j] = \mathcal{V}_{i+j} \text{ et } \mathcal{V}_s = 0, \text{ for } s > N.$$

Le nombre

$$Q = \sum_{i=1}^{N} i \dim \mathcal{V}_i$$

est appelé la dimension homogène de $\mathbb{G}$. Il s'agit de la dimension de Hausdorff du groupe qui est différente de la dimension topologique qui est juste $\sum_{i=1}^{N} \dim \mathcal{V}_i$.

Pour $\lambda > 0$, l'opérateur de dilatation (sur l'algèbre de Lie) dil_λ est l'opérateur agissant par multiplication par λ^i sur $\mathcal{V}_i$ et on notera D le champ de vecteur des dilatations.

On considère alors des vecteurs $V_1, ..., V_d \in \mathfrak{g}$ une base de $\mathcal{V}_1$. Ces vecteurs V_i peuvent être identifiés avec des champs de vecteur invariants à gauche et à droite sur $\mathbb{G}$. On notera encore $V_1, \ldots, V_d$ les champs de vecteur invariants à gauche et $\hat{V}_1, ..., \hat{V}_d$ ceux à droite. Le sous Laplacien invariant à gauche sur $\mathbb{G}$ est l'opérateur :

$$L = \sum_{i=1}^{d} V_i^2.$$

On obtient :

Proposition 3.1. *[BB16]*
Soit $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ régulière et à support compact. Pour $g \in \mathbb{G}$, on a

$$\Gamma(P_t f, P_t f)(g) \leq \frac{\Lambda}{t} \left(P_t f^2(g) - (P_t f)^2(g) \right), \quad t > 0.$$

avec Λ la plus grande valeur propre de la matrice

$$M = \left(\int_{\mathcal{G}} \hat{V}_i(\ln p_1) \hat{V}_j(\ln p_1) p_1 d\mu \right)_{1 \leq i,j \leq d}. \tag{3.43}$$

De plus la constante Λ est optimale. Elle vérifie

$$\frac{Q}{2d} \leq \Lambda \leq \frac{Q}{2}$$

avec l'égalité $\Lambda = \frac{Q}{2d}$ sur les groupes de type H.

Sur $\mathbb{R}^d$ on retrouve bien la constante $\frac{1}{2t}$, constante que l'on peut aussi obtient aussi sour le critère $CD(0, \infty)$.

Le début de la preuve est similaire à celle de la preuve de l'inégalité de Driver-Melcher. Le premier point de la preuve est d'utiliser l'invariance à gauche ainsi que les dilatations pour montrer qu'il suffit de montrer l'inégalité au point 0 et au temps 1. Le deuxième point à utiliser l'égalité en 0 de V_i et $\hat{V}_i$ et la commutation des champs de vecteurs invariants à droite $\hat{V}_i$ avec le semi-groupe invariant à gauche P_t.

$$V_i P_1(f)(0) = \hat{V}_i P_1 f(0) = P_1(\hat{V}_i f)(0).$$

La preuve finit par une intégration par parties et Cauchy-Schwarz. Pour l'estimation de la constante, on utilise l'inégalité élémentaire : $\frac{1}{d}$ trace $M \leq \Lambda \leq$ trace M. La trace de M est donnée par

$$\text{trace } M = \int_{\mathcal{G}} \hat{\Gamma}(\ln p_1) p_1 d\mu = \int_{\mathcal{G}} \Gamma(\ln p_1) p_1 d\mu.$$

En utilisant que l'adjoint de D est $D^* = -\left(D + \frac{Q}{2}\right)$ et la relation : $[L, D] = L$, on peut montrer que cette quantité vaut : $\frac{Q}{2}$.

Maintenant, les groupes de Carnot de type H sont des groupes de Carnot d'ordre 2 particuliers. Ils peuvent s'écrire simplement comme $\mathbb{R}^{2n+m} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m$ muni d'un produit

$$v * w = v + w + \frac{1}{2}[v, w]$$

avec $[\cdot, \cdot]$ un crochet sur $\mathbb{R}^{2n+m}$ dont le centre est $0 \times \mathbb{R}^m$ et telle que l'application $J_z : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ définie pour $z \in \mathbb{R}^m$ par :

$$< J_z(x), y >=< [x, y], z > \text{ for all } x, y \in \mathbb{R}^{2n}$$

est orthogonale si $|z| = 1$. Ces groupes admettent un sous Laplacien canonique dont le noyau de la chaleur issu de l'identité est donné par (voir par exemple [Eld09]) :

$$p_t(x, z) = \frac{1}{(2\pi)^m} \frac{1}{(4\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i<\lambda,z>} e^{-\frac{|\lambda||x|^2}{4} \coth|\lambda|t} \left(\frac{|\lambda|}{\sinh|\lambda|t} \right)^n d\lambda. \quad (3.44)$$

C'est donc une fonction qui ne dépend juste de $|x|$ et de $|z|$. Les symétries du groupe impliquent alors que la matrice M définie ci-dessus en (3.43) est en fait un multiple de l'identité, d'où le résultat.

3.2 Une inégalité de log-Sobolev par la méthode de Gross sur les groupes de Carnot d'ordre 2

Avec Djalil Chafaï et Ronan Herry, on a proposé une nouvelle inégalité de log-Sobolev sur le groupe de Heisenberg et sur les groupes de Carnot de rang 2 [BCH16]. Notre preuve s'inspire de la méthode historique développée par dans [Gro75] pour la gaussienne et dans [Gro92] pour les trajectoires sur un groupe de Lie elliptique. Cette méthode part de l'espace à 2 points, utilise la tensorisation de l'inégalité de log-Sobolev (et de celle Poincaré) pour obtenir grâce au théorème central limite l'inégalité de log-Sobolev optimale pour la loi gaussienne usuelle.

Notre preuve marche indifféremment pour le cas elliptique ou pour le cas sous elliptique. Ici nous n'écrirons les résultats que pour le cas sous elliptique. L'intérêt de notre résultat est double. D'une part, on calcule explicitement pour la première fois le membre de droite du théorème 4.1 dans [Gro92] et d'autre part, on montre que cette méthode ne dégénère pas dans le cadre sous elliptique.

De part de la nature non commutative du groupe, notre approche produit un nouveau gradient qui fait naturellement intervenir un pont Brownien sur le groupe de Carnot. Il va être important de comparer cette nouvelle inégalité à d'autres inégalités de log-Sobolev. L'inégalité de log-Sobolev sous elliptique n'est connue que pour le groupe de Heisenberg [Li06] et les groupes de Carnot de type H [Eld10] (voir également les résultats de Hebish et Zegarlinski [HZ10] pour une autre approche). Par le critère de courbure dimension généralisé de Baudoin et Garofalo, des inégalités de log-Sobolev avec un gradient elliptique sont également valables pour tout les groupes de Carnot de rang 2, voir par exemple [Bau17b, Proposition 4.11]. Nous ne comparerons ces inégalités que dans le cas du groupe de Heisenberg.

L'article [BCH16] ne détaille que le cas du groupe de Heisenberg. Nous considérerons ici plus en détail le cas des groupes de Carnot de rang 2 et détaillerons un peu plus la preuve. Par[BLU07, Théorème 3.2.2], un tel groupe peut s'écrire comme $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ équipé de la loi de groupe :

$$(x,z) \cdot (x',z') = (x + x', z + z' + \frac{1}{2}\langle Bx, x' \rangle)$$

où $x, x' \in \mathbb{R}^d$, $z, z' \in \mathbb{R}^m$ et

$$\langle Bx, x' \rangle = \Big(\langle B^{(1)} x, x' \rangle, \cdots, \langle B^{(m)} x, x' \rangle \Big)$$

Pour des matrices antisymétriques $d \times d$ $B^{(l)}$, $1 \leq l \leq m$. On rappelle la dilatation donnée par : $\mathrm{Dil}_\lambda(x,z) := (\lambda x, \lambda^2 z)$. Pour la suite on notera $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}), z = (z^{(1)}, \dots, z^{(m)})$.

De manière similaire à (2.6), le mouvement Brownien sous-riemannien naturel (de générateur le sous Laplacien canonique) s'écrit $(\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t)_{t \geq 0}$ avec $\mathbf{X}$ un mouvement Brownien standard sur $\mathbb{R}^d$ et où $\mathbf{Z}$ corresponds à son aire de Lévy généralisé :

$$\mathbf{Z}_t^{(l)} = \sum_{1 \leq p < q \leq d} b_{p,q}^{(l)} \mathbf{A}_t^{(p,q)}$$

où

$$\mathbf{A}_t^{(p,q)} = \int_0^t \mathbf{X}_s^{(p)} d\mathbf{X}_s^{(q)} - \int_0^t \mathbf{X}_s^{(q)} d\mathbf{X}_s^{(p)}.$$

Pour la suite, on note γ la loi de $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}_1)$.

Théorème 3.2. *[BCH16]*

Pour toute $f \in \mathrm{Schwartz}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

$$\mathrm{Ent}_\gamma(f^2) \leq 2 \sum_{p=1}^d \int_0^1 \mathbb{E}\left[\left(\partial_p f(\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}_1) + \sum_{l=1}^m \left(\sum_{q=1}^d b_{p,q}^{(l)} (\mathbf{X}_1^{(q)} - 2\mathbf{X}_s^{(q)}) \right) \partial_{d+l} f(\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}_1) \right)^2 \right].$$

L'idée de la preuve est la suivante : on considère $s_n : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}^N$ l'application définie par

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Dil}_{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left((x_1, 0) \cdot (x_2, 0) \cdot \dots \cdot (x_n, 0) \right).$$

La loi du groupe étant simple, on peut calculer explicitement

$$s_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{2n} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} \langle Bx_i, x_j \rangle \right).$$

Cette application s_n donne les coordonnées de la marche aléatoire renormalisée sur le groupe de Carnot. En particulier si on pose $S_n = s_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ pour des vecteurs aléatoires $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ gaussiens standards dans $\mathbb{R}^d$ et indépendants, un théorème central limite sur les groupes de Carnot donne :

$$S_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{law}} \gamma.$$

L'idée est maintenant d'utiliser l'inégalité de log-Sobolev classique optimale pour la gaussienne $\mathcal{N}(0, I_{dn})$ sur $\mathbb{R}^{dn}$ qui est indépendante de la dimension, puis d'appliquer le théorème central limite précédent.

Pour cela étant donné $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, on considère $g : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ définie par $g = f(s_n)$, on obtient

$$\mathrm{Ent}_{\mathcal{N}(0,I_{dn})}(g^2) \leq 2\mathbb{E}_{\mathcal{N}(0,I_{dn})} \left[\sum_{p=1}^{d} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i^{(p)}} g \right)^2 \right].$$

Les matrices $B^{(l)}$ étant antisymétriques, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i^{(p)}}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \partial_p f(s_n) + \frac{1}{2n} \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{q=1}^{d} b_{p,q}^{(l)} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{i,j} x_j^{(q)} \right) \partial_{d+l} f(s_n)$$

avec $\epsilon_{i,j} := \mathbf{1}_{j>i} - \mathbf{1}_{j<i}$. Il reste à évaluer le terme de droite. pour cela on va considérer que S_n n'est pas juste donné par une marche aléatoire renormalisée mais par le tableau triangulaire d'accroissements :

$$\xi_{n,i} := \sqrt{n} \left(\mathbf{X}_{\frac{i}{n}} - \mathbf{X}_{\frac{i-1}{n}} \right)$$

pour $n \geq 1, 1 \leq i \leq n$ avec $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0} = (\mathbf{X}_t^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}_t^{(d)})_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard sur $\mathbb{R}^d$. On pose alors

$$S_n := \mathrm{Dil}_{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left((\xi_{n,1}, 0) \cdot (\xi_{n,2}, 0) \cdot \cdots \cdot (\xi_{n,n}, 0) \right).$$

On définit également :

$$X_n^{(q)} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_{n,i}^{(q)}, \quad X_{n,i}^{(q)} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{i,j} \xi_{n,j}^{(q)}, \quad Z_n^{(l)} := \frac{1}{2n} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} \sum_{p,q=1}^{d} \xi_{n,i}^{(p)} \, b_{p,q}^{(m)} \, \xi_{n,j}^{(q)},$$

Avec ces notations, on a

$$S_n = (X_n, Z_n),\ X_n = \mathbf{X}_1,\ X_{n,i} = \mathbf{X}_1 - \left(\mathbf{X}_{\frac{i}{n}} + \mathbf{X}_{\frac{i-1}{n}}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}(0,I_{dn})}\left[\frac{\partial g}{\partial x_i^{(p)}}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\partial_p f(X_n, Z_n) + \frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{q=1}^{d} b_{p,q}^{(l)} X_{n,i}^{(q)}\right)\partial_{d+l} f(X_n, S_n)\right].$$

Un théorème central limite fonctionnel sur les groupes de Lie (dû à Stroock et Varadhan [SV73]) donne : lorsque $n \to +\infty$ et $\frac{i}{n} \to s$:

$$(X_n, Z_n, X_{n,i}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{law}} (\mathbf{X}_1, \mathbf{Z}_1, \mathbf{X}_1 - 2\mathbf{X}_s).$$

L'intégrale entre 0 et 1 s'obtient enfin comme une limite d'une somme de Riemann et le résultat s'en suit.

Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_1$ correspond à $d = 2, m = 1$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avec les notations de la partie 2.2, on obtient

Théorème 3.3. *[BCH16]*
Pour toute $f \in \mathrm{Schwartz}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$,

$$\mathrm{Ent}_\gamma(f^2) \le 2\int_0^1 \mathbb{E}(g(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_t))\,\mathrm{d}t \tag{3.45}$$

avec, pour $h = (x, y, z)$ et $h' = (x', y', z')$,

$$g(h, h') = ((X + y'Z)f(h))^2 + ((Y - x'Z)f(h))^2$$

On en déduit l'inégalité de log Sobolev à poids :

Corollaire 3.4. *[BCH16]*
Il existe $C > 0$ telle que pour toute $f \in \mathrm{Schwartz}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$,

$$\mathrm{Ent}_\gamma(f) \le 2\mathbb{E}_\gamma\Big((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + C(1 + x^2 + y^2 + |z|)(\partial_z f)^2\Big). \tag{3.46}$$

Cette estimée est une conséquence de la symétrie du noyau de la chaleur et du contrôle du pont Brownien sur Heisenberg suivant intéressant pour lui même : En notant $\mathbf{B}_t = (\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t, \mathbf{Z}_t)$, on a

Lemme 3.5. *[BCH16] il existe $C > 0$ telle que pour tout $0 \le t \le 1$ et $h = (x, y, z) \in \mathbb{H}$,*

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}_t^2 + \mathbf{Y}_t^2 \mid \boldsymbol{B}_1 = h) \le C(t^2 d_{cc}^2(0, h) + t).$$

La preuve utilise la formule de Bayes et les estimées optimales du noyau de la chaleur (2.8).

Par symétrie du noyau de la chaleur, on déduit de l'inégalité de H.Q. Li l'inégalité de log-Sobolev à poids

$$\mathrm{Ent}_\gamma(f^2) \leq C_{Li}\mathbb{E}_\gamma\Big((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + \frac{x^2+y^2}{4}(\partial_z f)^2\Big). \tag{3.47}$$

tandis que du critère de courbure dimension de Baudoin-Garofalo, on a que pour tout $\nu > 0$,

$$\mathrm{Ent}_\gamma(f^2) \leq 2\nu(e^{\frac{1}{\nu}}-1)\mathbb{E}_\gamma\Big((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + \big(\nu + \frac{x^2+y^2}{4}\big)(\partial_z f)^2\Big). \tag{3.48}$$

D'après le corollaire 3.4, l'inégalité de log-Sobolev 3.3 semble un moins bonne que celle de H.Q.Li ou celle obtenue par le critère de Baudoin et Garofalo. Il faut cependant remarquer que l'inégalité du théorème 3.3 est optimale pour une fonction ne dépendant pas de z, ce qui n'est pas le cas pour les 2 autres.

3.3 Couplages co-adaptés sur le groupe de Heisenberg

Cette section ainsi que les deux suivantes traitent des couplages sur le groupe de Heisenberg et présentent les résultats obtenus dans l'article [BJ18] avec Nicolas Juillet. Dans cette section nous montrons un résultat négatif sur les couplages co-adaptés et leur contrôle en distance de Wassertsein L^p pour $p \geq 2$. Dans la section 3.4, nous étudions le couplage par réflection et montrons qu'il vérifie un contrôle uniforme en distance de Wasserstein L^p pour $0 < p < 1$. Le cas $p \in (1, 2]$ reste ouvert. Dans la section 3.5, nous présentons un couplage statique qui vérifie le contrôle uniforme en distance de Wasserstein L^1.

Mentionnons également le travail récent de S. Banerjee, M. Gordina et P. Mariano [BGM18] où les auteurs ont utilisés des couplages non-adaptés sur le groupe de Heisenberg pour obtenir des estimées en variation totale et des estimées du gradient des fonctions harmoniques.

Dans la littérature, les couplages en distance de Wasserstein L^∞ pour des diffusions ont été introduits pour obtenir des estimées de gradient L^1 du semi-groupe associé (voir par exemple [Wan97b, Cra91, Cra92]). Kuwada a étendu ce résultat au cas L^p, L^q pour $p, q \geq 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et à l'aide de la dualité de Kantorovich a montré qu'il y a dans un cadre général en fait équivalence entre ces deux contrôles.

On rappelle que pour un espace métrique (M, d), pour $p \in (0, \infty]$, la distance de Wasserstein L^p entre deux mesures de probabilités μ et ν est donnée par

$$\mathcal{W}_p(\mu,\nu) = \left(\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \iint d(x,y)^p d\pi(x,y) \right)^{1/p} = \inf_{X\sim\mu,\, Y\sim\nu} \|d(X,Y)\|_p. \tag{3.49}$$

où $\Pi(\mu,\nu)$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur $M\times M$ de marginales μ et ν. Pour $0 < p < 1$, il s'agit simplement d'une pseudo distance car l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.

Dans le cas riemannien, il est bien connu que si la courbure de Ricci est minorée par $k \in \mathbb{R}$, pour tout $a \in M$, $a' \in M$ le couplage par transport parallèle produit deux mouvements Browniens B_t^a , $B_t^{a'}$ sur la variété issus respectivement de a et a' et vérifiant :

$$d(B_t^a, B_t^{a'}) \leq e^{-kt/2} d(a,a') \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{3.50}$$

De plus toujours dans le cas riemannien, en posant μ_t^a la loi de B_t^a, pour un (et donc tout) $p \in [1,\infty]$, Von-Renesse et Sturm ont montré l'équivalence entre le contrôle de Wasserstein L^p :

$$\mathcal{W}_p(\mu_t^a, \mu_t^{a'}) \leq e^{-kt/2} d(a,a') \quad \text{pour tout } \ a \in M,\, a' \in M \text{ et tout } t \geq 0;$$

et la courbure de Ricci minorée par k (svoir [vRS05] et[Kuw10, Remarque 2.3]).

En raison du résultat de Kuwada, l'inégalité de H.Q.Li implique donc le contrôle de Wasserstein suivant : pour tout $a, a' \in \mathbb{H}$ et tout $t \geq 0$ fixés, il existe un couplage des lois de $\mathbf{B}_t^a$ et de $\mathbf{B}_t^{a'}$ deux mouvements Browniens sur le groupe de Heisenberg vérifiant

$$d_{\mathbb{H}}(\mathbf{B}_t^a, \mathbf{B}_t^{a'}) \leq C d_{\mathbb{H}}(a,a') \quad \text{presque sûrement.} \tag{3.51}$$

Avec Nicolas Juillet [BJ18], nous avons répondu négativement à une question soulevée dans [Kuw10] et montré qu'un couplage markovien ou plus généralement co-adapté de deux mouvement Browniens sur le groupe de Heisenberg ne peut pas rester à distance bornée en tout temps. Formellement, un couplage est dit co-adapté si l'interaction dans le couplage ne dépend que du passé. On renvoie ici à [Ken10] pour une définition précise. Précisément, nous avons montré :

Théorème 3.6. *[BJ18]*

Soit $(\boldsymbol{B}_t, \boldsymbol{B}'_t)_{t\geq 0}$ un couplage co-adapté de deux mouvements Browniens sur le groupe de Heisenberg issus respectivement de $a = (x,y,z)$ et de $a' = (x',y',z')$. On pose $R_0^2 := (x'-x)^2 + (y'-y)^2 > 0$ et on suppose que $R_0 > 0$. Alors pour tout $C > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\forall t \geq 0,\, d_{\mathbb{H}}(\boldsymbol{B}_t, \boldsymbol{B}'_t) \leq C\right) \neq 1.$$

De plus en utilisant les dilatations, on peut obtenir la version améliorée :

Théorème 3.7. *[BJ18]*
Pour tout $T > 0$, on a

$$\sup_{a \neq a' \in \mathbb{H}} \inf_{\mathcal{A}_T^{(a,a')}} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{\mathrm{essup}_{(\Omega,\mathbb{P})} d_{\mathbb{H}}(\boldsymbol{B}_t^a, \boldsymbol{B}_t^{a'})}{d_{\mathbb{H}}(a, a')} = +\infty.$$

Ici $\mathcal{A}_T^{(a,a')}$ désigne l'ensemble des couplages co-adaptés $(\boldsymbol{B}_t^a, \boldsymbol{B}_t^{a'})_{0 \leq t \leq T}$ de deux mouvement Browniens sur le groupe de Heisenberg issus respectivement de a et a'.

Ceci montre déjà une claire différence avec le cas riemannien. Contrairement à (3.50), on ne peut pas avoir le contrôle (3.51) pour tout points a, a' et tout $t \geq 0$ dans le cadre des couplages co-adaptés. On rappelle ici que le groupe de Heisenberg joue le rôle d'un espace de courbure nulle en géométrie sous elliptique.

On a en fait montré le résultat plus fort que tout couplage co-adapté de mouvement Browniens sur le groupe de Heisenberg ne restait pas borné dans L^2.

Théorème 3.8. *[BJ18]*
Soit $(\boldsymbol{B}_t, \boldsymbol{B}'_t)_{t \geq 0}$ un couplage co-adapté de deux mouvements Browniens sur le groupe de Heisenberg tel que $R_0 > 0$,

$$\limsup_{t \to +\infty} \mathbb{E}\left[d_{\mathbb{H}}(\boldsymbol{B}_t, \boldsymbol{B}'_t)^2\right] \to +\infty.$$

De plus comme précédemment en utilisant les dilatations, on peut en fait montrer :

Théorème 3.9. *[BJ18]*
Soit $p \geq 2$ et $T > 0$. On a

$$\sup_{a \neq a' \in \mathbb{H}} \inf_{\mathcal{A}_T^{(a,a')}} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{\mathbb{E}[d_{\mathbb{H}}^p(\boldsymbol{B}_t^a, \boldsymbol{B}_t^{a'})]^{\frac{1}{p}}}{d_{\mathbb{H}}(a, a')} = +\infty.$$

Pour ce qui nous intéresse ici, deux mouvements Browniens $(\mathbf{B}_t)_t$ et $(\mathbf{B}'_t)_t$ sur $\mathbb{R}^2$, définis sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ sont co-adaptés si, quitte à enrichir la filtration, il existe un mouvement Brownien $(\hat{\mathbf{B}}_t)_{t \geq 0}$ défini sur la même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et indépendant de $(\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}$ tel que

$$d\mathbf{B}'(t) = J(t) d\mathbf{B}_t + \hat{J}(t) d\hat{\mathbf{B}}_t \tag{3.52}$$

avec $(J_t)_{t \geq 0} = ((J_t^{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2})_{t \geq 0}$ et $\hat{J}$ des matrices vérifiant

$$JJ^T + \hat{J}\hat{J}^T = I_2 \tag{3.53}$$

et $J(t), \hat{J}(t) \in \mathcal{F}_t$.

On notera R_t la distance horizontale entre les deux Browniens $\mathbf{B}_t$ et $\mathbf{B}'_t$ in $\mathbb{R}^2$, i.e. $R_t^2 = (B_t^1 - B_t'^1)^2 + (B_t^2 - B_t'^2)^2$ et Z_t leur aire de Lévy relative, i.e. la troisième coordonnée de $(\mathbf{B}_t'^{-1}\mathbf{B}_t)$. Par invariance à gauche la distance au carré

$$d^2_{\mathbb{H}}(\mathbf{B}_t, \mathbf{B}'_t) = d^2_{\mathbb{H}}(e, \mathbf{B}_t'^{-1}\mathbf{B}_t)$$

est comparable à la norme homogène au carré

$$\sqrt{R_t^2 + |Z_t|}.$$

Quand $R_t > 0$, il sera plus intéressant de travailler dans le repère mobile direct (aléatoire) (v_1, v_2) défini en prenant pour $v_1(t)$ le vecteur normalisé. On pose alors Q_t la matrice de passage associée et

$$K_t = Q_t^T J_t Q_t \ \hat{K}_t = Q_t^T \hat{J}_t Q_t.$$

Le lemme suivant déjà paru dans [Ken07] donne les équations différentielles stochastiques satisfaite par R_t^2 et Z_t.

Lemme 3.10. *[BJ18]*
Quand $R_t \neq 0$, *on a*

$$\begin{cases} d(R_t^2) = 2R_t\sqrt{2(1-K^{1,1})}\, dC_t + \big(2(1-K^{1,1}) + 2(1-K^{2,2})\big)\, dt \\ dZ_t = \dfrac{R_t}{2}\sqrt{2(1+K^{2,2})}\, d\tilde{C}_t - \dfrac{1}{2}(K^{1,2} - K^{2,1})dt \end{cases}$$

avec $(C_t)_{t\geq 0}$ *et* $(\tilde{C}_t)_{t\geq 0}$ *deux mouvements Browniens standards sur* $\mathbb{R}$ *dont la covariation vérifie :*

$$\langle \sqrt{2(1-K^{1,1})}dC_t, \sqrt{2(1+K^{2,2})}d\tilde{C}_t\rangle = -(K^{1,2} - K^{2,1})dt. \tag{3.54}$$

On notera que (3.53) est aussi satisfaite pour $(K, \hat{K})$ ainsi que

$$\mathrm{Trace}\, K = \mathrm{Trace}\, J,\ K^{1,2} - K^{2,1} = J^{1,2} - J^{2,1}.$$

Commençons par décrire quelques couplages :

— Le couplage synchrone correspond à $K = Id$.Dans ce cas $R_t \equiv R_0$ et $Z_t = Z_0 + W_{R_0 t}$ avec W un mouvement Brownien.
— Le couplage par réflection correspond à $K^{1,1} = -1$ $K^{2,2} = 1$, $K^{1,2} = K^{2,1} = 0$. Il sera étudié en détail dans la partie suivante.
— Le couplage de Kendall : dans [Ken07] Kendall a construit un couplage co-adapté pour lequel deux mouvements Browniens sur le groupe de Heisenberg se rencontrent en temps fini presque sûrement. Ce couplage alterne entre les deux stratégies précédentes.

— Le couplage pervers correspond à $K^{1,1} = 1$, $K^{2,2} = -1$, $K^{1,2} = K^{2,1} = 0$. Les quantités R_t et Z_t sont alors en fait déterministes :

$$R_t = \sqrt{R_0^2 + 4t} \text{ e } Z_t = Z_0.$$

Le nom a été introduit par Kendall [Ken09] et a aussi été étudié dans [PP16, Section 5] dans un contexte riemannien.

La preuve du théorème 3.6 se fait alors en supposant par l'absurde que R_t et $|Z_t|$ restent bornés. On a alors tout d'abord

$$\mathbb{E}[R_t^2] = R_0^2 + \mathbb{E}\left[2\int_0^T (1 - J^{1,1}(s)) + (1 - J^{2,2}(s))ds\right] \leq C \tag{3.55}$$

En travaillant sur $E[Z_t^2]$, et en utilisant $R_t \leq C$, on obtient également

$$\mathbb{E}\left[-2\int_0^t Z_t(J^{1,2}(s) - J^{2,1}(s))ds + \int_0^t R_s^2 ds\right] \leq C' \tag{3.56}$$

La contradiction s'obtient en remarquant que (3.55) implique :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |J^{1,2}(s) - J^{2,1}(s)|ds\right] \leq C''\sqrt{t};$$

tandis que d'autre part, $(R_t^2)_{t\geq 0}$ étant une sous martingale,

$$\int_0^t \mathbb{E}[R_s^2]ds \geq R_0^2 t. \tag{3.57}$$

Pour aller plus loin que le théorème 3.6, on va faire une étude précise des trajectoires de $(Z_t)_{t\geq 0}$. On décompose $(Z_t)_t = M_t - A_t$ en sa partie martingale M_t et sa partie à variation bornée $-A_t$. La preuve du théorème 3.8 se fait aussi par l'absurde et repose sur le lemme ci-dessous. La difficulté principale est d'obtenir une minoration de $\mathbb{E}[|M_t|]$.

Lemme 3.11. *Soit $T > 0$. Sous l'hypothèse*

$$C := \sup_{0\leq t\leq T} \sqrt{\max(\mathbb{E}(R_t^2), \mathbb{E}(|Z_t|))} < +\infty, \tag{3.58}$$

il existe $h > 0$ indépendant de T tel que pour tout $0 \leq t \leq T - h$

$$\mathbb{E}(|M_{t+h} - M_t|) \geq 10C^2, \tag{3.59}$$

$$\mathbb{E}\mathcal{V}_0^t(A) \leq \sqrt{\frac{C^2 t}{2}} \tag{3.60}$$

avec $\mathcal{V}_0^t(A)$la variation totale de A sur $[0,t]$.

Les grandes lignes de la preuve du lemme sont d'abord de minorer le crochet de la martingale M_t. Pour cela, on montre que sous l'hypothèse $\mathbb{E}[R_T^2] \le C$, une proportion non nulle de trajectoires de R_t restent au dessus d'un seuil disons $R_0/2$. On déduit alors de cette minoration du crochet ([BJ18, lemme 3.2]) la minoration voulue de $\mathbb{E}(|M_{t+h} - M_t|)$.

Les théorèmes 3.7 et 3.9 s'obtiennent alors en montrant à l'aide des dilatations sur le groupe de Heisenberg que pour tout $p \in (0 + \infty]$ la valeur de la constante C_T définie par :

$$C_T := \sup_{a \neq a' \in \mathbb{H}} \inf_{\mathcal{A}_T^{(a,a')}} \sup_{0 \le t \le T} \frac{\mathbb{E}[d_{\mathbb{H}}^p(\mathbf{B}_t^a, \mathbf{B}_t^{a'})]^{\frac{1}{p}}}{d_{\mathbb{H}}(a, a')} \in [0, +\infty];$$

est en fait indépendante de T.

Une des difficultés pour traiter le cas $p \in [1, 2)$ est que la fonction $\phi(z) = |z|^{p/2}$ n'est plus convexe. On ne peut donc plus utiliser la minoration $\mathbb{E}[\phi(M_t)] \ge \mathbb{E}[\phi(M_{t\wedge\tau})]$ pour un temps d'arrêt τ.

3.4 Le couplage par réflection sur le groupe de Heisenberg

Dans cette partie, on étudie précisément le couplage par réflection. On rappelle que la matrice de couplage est donnée par $K^{1,1} = -1$, $K^{2,2} = 1$, $K^{1,2} = K^{2,1} = 0$ pour $t < \tau$ et par $J = \mathrm{Id}_2$ pour $t \ge \tau$ où $\tau = \inf\{s \ge 0 : R_s = 0\}$ désigne le temps d'atteinte de of 0 pour $(R_t)_{t\ge 0}$. Le couplage par réflection consiste donc à faire un couplage par réflection des mouvements Browniens sous-jacents sur $\mathbb{R}^2$ jusqu'à ce qu'ils se touchent et ensuite de les faire évoluer ensemble.

On obtient alors

$$R_t = R_0 + 2C_{t\wedge\tau} \quad \text{and} \quad Z_t = Z_0 + \int_0^{t\wedge\tau} (R_0 + 2C_{s\wedge\tau}) d\tilde{C}_s$$

avec $(C_s)_s$ et $(\tilde{C}_s)_s$ deux mouvement Browniens réels standard indépendants et $\tau = \inf\{s \ge 0 : C_s = -R_0/2\}$.

Un résultat positif est que pour $p > 0$, pour le couplage par réflection, la quantité

$$\sup_{a \neq a' \in \mathbb{H}} \sup_{t \ge 0} \frac{\mathbb{E}[d_{\mathbb{H}}(\mathbf{B}_t^a, \mathbf{B}_t^{a'})^p]}{d_{\mathbb{H}}(a, a')^p} \tag{3.61}$$

est finie si et seulement si $p < 1$. Ce résultat n'est cependant pas suffisant pour retrouver par dualité des estimées de gradient du semi-groupe de la chaleur sur Heisenberg. On a en fait montré le résultat plus précis :

Proposition 3.12. *[BJ18]*

Supposons que $R_0 > 0$ et $Z_0 = 0$. Soit $p > 0$, il existe des constantes telles que :

$$\mathbb{E}[R_t] = R_0$$

et

$$\begin{cases} \mathbb{E}[|Z_t|^p] & \sim_{t\to\infty} C_p R_0 t^{p-\frac{1}{2}} \quad \textit{si } p > \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}[|Z_t|^p] & \sim_{t\to\infty} C'_p R_0 \ln t \quad \textit{si } p = \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}[|Z_t|^p] & \to_{t\to+\infty} C''_p R_0^{2p} \quad \textit{si } 0 < p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

L'idée de la preuve est la suivante . Par le théorème de Dambins-Dubins-Schwarz, Z est un mouvement Brownien changé de temps :

$$Z_t = W_{T(t)} \text{ avec } T(t) = \int_0^t R_s^2 ds$$

et où W un mouvement Brownien indépendant $(R_t)_{t\geq 0}$. On calcule alors

$$\begin{aligned} E\left[|Z_t|^p\right] &= \mathbb{E}(|W_{T(t)}|^p) \qquad (3.62) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(|W_{T(t)}|^p | \tau = u) f_\tau(u) du \\ &= \underbrace{\int_0^t \mathbb{E}(|W_{T(t)}|^p | \tau = u) f_\tau(u) du}_{h_1(t)} + \underbrace{\int_t^{+\infty} \mathbb{E}(|W_{T(t)}|^p | \tau = u) f_\tau(u) du}_{h_2(t)} . \end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne on a séparé l'intégrale entre les trajectoires de R qui touchent 0 avant le temps t et celles qui touchent 0 après. On utilise maintenant une convergence précise de la trajectoire de R renormalisée pour toucher 0 au temps $\tau = 1$ vers une excursion Brownienne pour estimer de manière précise chacune des 2 intégrales.

3.5 Un couplage statique sur le groupe de Heisenberg

On présente ici le second résultat positif de [BJ18]. On propose un couplage explicite statique des lois de $\mu_t^a = \mathrm{Law}(\mathbf{B}_t^a)$ et$\mu_t^{a'} = \mathrm{Law}(\mathbf{B}_t^{a'})$ à un instant fixé t. Ce couplage réalise un contrôle L^1 Wassertsein, qui est le plus faible parmi les contrôles L^p de Wassertein.

Théorème 3.13. *[BJ18]*
Il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ et $a, a' =\in \mathbb{H}$,il existe un vecteur aléatoire $((X,Y,Z),(X',Y',Z'))$ de marginales $\mu_t^a = \mathrm{Law}(\boldsymbol{B}_t^a)$ et $\mu_t^{a'} = \mathrm{Law}(\boldsymbol{B}_t^{a'})$ tel que

$$\mathbb{E}(d_{\mathbb{H}}((X,Y,Z),(X',Y',Z'))) \leq C d_{\mathbb{H}}(a,a')$$

La construction du couplage est la suivante. On réalise d'abord un couplage des parties horizontales (X,Y) et (X',Y') par une simple translation. Les lois conditionnelles de la troisième coordonnée $\mathcal{L}(Z|(X,Y))$ et $\mathcal{L}(Z'|(X',Y'))$ diffèrent alors elles aussi simplement par une translation mais qui dépend de la valeur de (X,Y).

On utilise ensuite un couplage de cette dernière coordonnée adapté au coût non-convexe $c : (z, z') \mapsto \sqrt{|z - z'|}$ sur $\mathbb{R}$:

Lemme 3.14. *[BJ18]*
Si η est une probabilité sur $\mathbb{R}$ avec une densité dérivable f, et si $l \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{W}_c(\eta, \eta_l) := \inf_{\pi \in \Pi(\eta, \eta_l)} \iint \sqrt{|y - x|}\, d\pi \leq |l| \times \left(\int |f'(x)| \sqrt{|x|}\, dx \right)$$

avec η_l la translatée de η par l.

L'idée est d'écrire cette distance de Wasserstein comme une norme de la mesure signée : $\eta - \eta_l$ de densité au point x :

$$f(x) - f(x - l) = \int_0^l f'(x - u) du$$

Par inégalité triangulaire il nous reste à estimer la norme de la mesure signée de densité au point x : $f'(x - u)$ pour tout $0 \leq u \leq l$. Cette quantité ne dépend pas de u et peut être estimée en envoyant la mesure positive de densité $f'_+(x)$ sur un Dirac pondéré en 0 puis sur celle de densité $f'_-(x)$.

La suite de la preuve est écrite dans[BJ18] avec $t = 1$ mais elle est en fait bien homogène et peut être directement faite pour tout $t > 0$.

Il faut noter que l'utilisation du lemme 3.14 nécessite la borne suivante du gradient du noyau de la chaleur sur le groupe de Heisenberg

$$|\partial_z \ln p_t(x, y, z)| \leq \frac{C}{t} \tag{3.63}$$

avec C une constante universelle, estimée qui peut s'obtenir à partir de la formule de Gaveau du noyau de la chaleur (voir [Li07]).

3.6 Perspectives

Le but derrière certains des travaux de cette partie est de s'intéresser aux liens entre couplages et inégalités fonctionnelles sur le groupe de Heisenberg. Une question clé reste l'obtention de l'inégalité de H.Q. Li par des méthodes probabilistes. Bien sûr, on ne peut pas l'obtenir à partir d'un couplage adapté, l'étude de couplages non adapté n'est pour le moment que peu développée. Il peut aussi aussi être intéressant d'étudier le couplage perverse et son lien avec des inégalités pour le semi-groupe de la chaleur.

Une autre possibilité est bien sûr d'étendre l'étude de ces couplages (et notamment le couplage par reflection) à d'autres espaces comme par exemple les autres espaces modèles que sont $SU(2)$ et le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$ ou pour des variétés sous riemanniennes plus générales vérifiant un critère de courbure dilension généralisée.

Il peut également être intéressant de regarder ce que donne la méthode de Gross pour les autres espaces modèles et de voir si les calculs sont explicites ou non. Il peut être aussi. intéressant d'essayer cette méthode pour des groupes de Carnot de rang supérieur ou égal à 3 ; les inégalités de Log-Sobolev n'étant pas connues dans ce cadre.

4 Entrelacement entre gradient et semi-groupes de diffusion

4.1 Inégalités de Bracamp-Lieb généralisées

Le but principal de cette partie est d'affiner le critère de Bakry-Emery afin d'obtenir des inégalités de Poincaré avec de bonnes constantes explicites. Notre approche consistera à généraliser l'inégalité classique de Brascamp-Lieb [BL76]. Commençons directement par rappeler cette inégalité classique. On considère une mesure de probabilité $d\mu = e^{-V} d\mathrm{vol}$, avec V un potentiel régulier sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 4.1. *[BL76]*
Supposons que V est strictement convexe i.e. $HessV > 0$, alors

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T \, (Hess\, V)^{-1} \, (\nabla f) \, d\mu. \tag{4.64}$$

La version généralisée et améliorée que nous avons obtenu avec Aldéric Joulin et Marc Arnaudon est la suivante :

Théorème 4.2. *[ABJ18]*
Soit $x \in \mathbb{R}^d \to A(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ une application lisse et telle que
(H-sym) la matrice $(A^{-1})^T \, \nabla A^{-1}$ est symétrique.
Supposons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$M_A := Hess\, V - L(A^{-1})A > 0;$$

alors

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T \, (Hess\, V - L(A^{-1})A)^{-1} \, (\nabla f) \, d\mu. \tag{4.65}$$

Une preuve possible de l'inégalité de Brascamp-Lieb est basée sur une méthode connue sous le nom de méthode L^2 de Hörmander [H6̈5]. Elle est basée sur l'étude d'un opérateur de diffusion et de la formule de Weizenböck qui exprime la commutation entre le gradient et l'opérateur de diffusion. L'idée pour notre résultat sera de considérer une famille de commutations avec les gradients modifiés $A\nabla$. Des résultats proches apparaissent dans [KM16], leur idée étant de changer la métrique, de considérer l'opérateur naturel associé et de calculer le tenseur de Ricci de Bakry-Emeri associé. Remarquons que dans le cas où la matrice A est diagonale et avec la i-ème entrée ne dépendant que de la i-ème coordonnée : i.e. A s'écrit $A =$

$\mathrm{diag}(a_1(x_1), \ldots, a_d(x_d))$, , le potentiel $Hess\, V - L(A^{-1})A)$ s'écrit exactement comme le tenseur de Bakry-Emery obtenu après un changement de métrique produit (voir [KM16, Proposition 5.1]).

Dans toute la suite, contrairement à [ABJ18] nous ne ferons pas l'hypothèse que la hessienne de V est minorée mais qu'il existe A vérifiant la condition de symétrie (H-sym) pour laquelle M_A est minorée.

Dans un cadre général, étant donné une variété complète $\mathcal{M}$ (de métrique g) muni d'une mesure positive, $d\mu = e^{-V} d\mathrm{vol}$, avec V un potentiel régulier, on peut associer un opérateur de diffusion canonique : $L = \Delta_g - \nabla_g V \cdot \nabla_g$. Le cas qui nous intéresse ici principalement est celui de $\mathbb{R}^d$ muni de la métrique euclidienne, dans ce cas, l'opérateur L est simplement :

$$L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla.$$

Cet opérateur est clairement symétrique, i.e. pour tout $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$:

$$\int_{\mathcal{M}} f\, Lg\, d\mu = \int_{\mathcal{M}} Lf\, g\, d\mu = -\int_{\mathcal{M}} \nabla f \cdot \nabla g\, d\mu.$$

La dérive étant régulière, cet opérateur reste essentiellement auto-adjoint. Comme rappelé dans la section 2.1, on peut définir par le théorème spectral le semi-groupe associé $P_t := e^{tL}$.

Dans le cas où la mesure μ est une mesure de probabilité , on a de plus $1 \in \mathcal{D}(L)$ et $L1 = 0$. Et réciproquement

$$\text{si } Lf = 0 \text{ et } f \in \mathcal{D}(L) \text{ alors } f \text{ est constante.}$$

La formule de Weizenböck (ici écrite avec les gradients) exprime la commutation entre l'opérateur de diffusion L et le gradient. Elle s'écrit :

$$\nabla Lf = (\mathcal{L} - \nabla\nabla V)\,(\nabla f), \tag{4.66}$$

avec $\mathcal{L}$ l'opérateur de diffusion sur les gradients

$$\mathcal{L}(\nabla f) = \begin{pmatrix} L & & \\ & \ddots & \\ & & L \end{pmatrix} (\nabla f).$$

Cet opérateur $\mathcal{L}$ agit en fait sur toutes les champs de vecteurs F : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On peut montrer que l'opérateur de Schrödinger : $-\mathcal{L} + \nabla\nabla V$ est en fait symétrique et positif sur tous les champs de vecteurs (voir les formules de 2.5.2 et 2.5.4 dans [Hel02]). Le potentiel de départ étant régulier (et semi-borné), sans hypothèse supplémentaire, cet opérateur de Schrödinger est bien essentiellement auto-adjoint [Hel02] et on peut définir le semi-groupe associé $Q_t^{\mathrm{Hess} V}$

On remarquera que sans hypothèse de régularité, si M est juste une matrice symétrique dans l'espace L^2_{loc}, alors l'opérateur $\mathcal{L} - M$ est essentiellement auto-adjoint si M est minoré : $\inf_{x\in\mathbb{R}^d} \rho_{M(x)} > -\infty$ avec $\rho_{M(x)}$ la plus petite valeur propre de la matrice $M(x)$ (voir par exemple [Hel13]).

On peut alors relever l'identité (4.66) au niveau des semi-groupes pour obtenir :

$$\nabla P_t f = Q_t^{\text{Hess}V}(\nabla f), \tag{4.67}$$

Ici, pour établir ce résultat pour les semi-groupes nous utilisons une unicité de l'équation de Schrödinger "algébrique "sur les gradients. La preuve que nous connaissons s'inspire de P. Li [Li84] fonctionne lorsque le potentiel $HessV$ est minoré.

La fin de la preuve s'obtient alors grâce à une interpolation de la variance similaire à celle de l'entropie de la section 2.7 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} f\,(f-\mu(f))\,d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(P_0 f - P_\infty f) d\mu \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty f\,LP_t f\,dt\,d\mu \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\,\nabla P_t f\,d\mu\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\,\nabla f)^{\,T}\,Q_t^{\text{Hess}V}(\,\nabla f)\,d\mu\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\,\nabla f)^{\,T}\,(-\mathcal{L} + Hess\,V)^{-1}(\,\nabla f)\,d\mu
\end{aligned} \tag{4.68}$$

L'inégalité de Brascamp-Lieb classique se déduit alors simplement de $-\mathcal{L}$ est positif d'où

$$(-\mathcal{L} + Hess\,V)^{-1} \le Hess\,V^{-1}.$$

Maintenant notre idée est d'introduire une distorsion dans le gradient en considérant une application régulière $A : \mathbb{R}^d \to GL_n(\mathbb{R})$ et l'entrelacement

$$A\,\nabla L f = \mathcal{L}_A^{M_A}(A\nabla f), \tag{4.69}$$

avec $\mathcal{L}_A^{M_A}$ l'opérateur de Schrödinger matriciel agissant sur l'espace des champs de vecteur $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ par

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_A^{M_A} F &= A\,(\mathcal{L} - \nabla\nabla V)\,(A^{-1}\,F) \\
&= \mathcal{L}F + 2\,A\,\nabla A^{-1}\,\nabla F - (A\,\nabla\nabla V\,A^{-1} - A\,\mathcal{L}A^{-1})\,F \\
&= (\mathcal{L}_A - M_A)\,F,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}_A$ est l'opérateur (non diagonal) matriciel :

$$\mathcal{L}_A F := \mathcal{L}F + 2\,A\,\nabla A^{-1}\,\nabla F,$$

et M_A la matrice correspondant à l'opérateur de multiplication (i.e. d'ordre 0) :

$$M_A := A\,\nabla\nabla V\,A^{-1} - A\,\mathcal{L}A^{-1}.$$

De manière un peu plus précise que ce qui est écrit dans l'article [ABJ18], l'opérateur complet $-\mathcal{L}_A + M_A$ est toujours symétrique et positif sur tous les champs de vecteurs dans $L^2(\mu, S)$ où S désigne le produit scalaire $S = (AA^T)^{-1}$. En effet si $F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, un calcul élémentaire fournit :

$$\int_{\mathbb{R}^d} F \cdot S(\mathcal{L}_A - M_A)G d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} (A^{-1}F) \cdot (\mathcal{L} - \mathrm{Hess}V)(A^{-1}G) d\mu.$$

et le résultat de positivité sur tous les champs de vecteur découle de celle de $\mathcal{L} - \mathrm{Hess}V$.

La symétrie et la positivité sur les $A\nabla f$ peut se faire directement à l'aide de l'entrelacement et on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f) \cdot S(\mathcal{L}_A - M_A)(A\nabla g)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f) \cdot SA\nabla Lg d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} (Lf)(Lg) d\mu.$$

Maintenant, on va regarder la symétrie des opérateurs $\mathcal{L}_A$ et M_A de manière séparée.

Théorème 4.3. *[ABJ18]*

Supposons que

(H-sym) la matrice $(A^{-1})^T\,\nabla A^{-1}$ *est symétrique.*

ALors les deux opérateurs $\mathcal{L}_A$ *et* M_A *sont chacun symétriques sur* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \subset L^2(S, \mu)$ *et de plus l'opérateur* $-\mathcal{L}_A$ *est positif :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} F \cdot S(-\mathcal{L}_A)G d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla F \cdot S\nabla G d\mu.$$

Une conséquence de la condition (H-sym) est que les matrices

$$SM_A = (A^{-1})^T\left(\mathrm{Hess}V - L(A^{-1})A\right)A^{-1},$$

$$AM_AA^{-1} = \left(\mathrm{Hess}V - L(A^{-1})A\right)$$

et $L(A^{-1})A$ sont symétriques en tout point. Cette condition (H-sym) sur $\mathbb{R}^d$ est satisfaite lorsque A est une matrice diagonale. C'est lié au fait que $\mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme une variété produit. Nous ne connaissons pour le moment pas d'autres exemples.

Il nous faut maintenant relever l'entrelacement au niveau des semi-groupes. Considérons à nouveau l'opérateur complet $(\mathcal{L}_A - M_A)$. Cet opérateur s'obtenant par "transformation de Doob" de $(L - \mathrm{Hess}V)$, i.e. par multiplication par A^{-1} à l'intérieur de l'opérateur et par A à l'extérieur, avec A une transformation locale et préservant les champs $\mathcal{C}_c^\infty$, l'opérateur $(\mathcal{L}_A - M_A)$ est aussi essentiellement auto-adjoint. Notons $(Q_{t,A}^{M_A})_{t\geq 0}$ le semi-groupe associé.

Nous aurons besoin de l'unicité de l' équation de Schrödinger "algébrique" dans L^2 suivante pour laquelle nous supposons que le potentiel M_A est minorée.

Proposition 4.4. *[ABJ18]*

Supposons que la condition de symétrie (H-sym) est vérifiée et que la matrice $A^{-1}\, M_A\, A$ est uniformément minorée. Soit $T > 0$. Soit $F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ en x, dérivable pour $t \in (0,T]$ telle que $t \to F(t,\cdot)$ soit à valeurs dans $L^2(\mu, S)$ et continue sur $[0,T]$. Supposons que F vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t F &= \mathcal{L}_A^{M_A} F \\ F(0,\cdot) &= G, \qquad G \in L^2(S,\mu), \end{cases} \tag{4.70}$$

Alors

$$F(t,\cdot) = Q_{t,A}^{M_A} G, \quad t \geq 0.$$

Ici dans le problème de Cauchy (4.70), on ne fait pas l'hypothèse que $F(t,.)$ appartienne au domaine de $\mathcal{L}_A - M_A$. La preuve est une adaptation de celle de [Li84] donnée dans le cadre des variétés riemanniennes.

On en déduit alors l'entrelacement au niveau des semi-groupes :

Théorème 4.5. *[ABJ18]*

Supposons que la condition de symétrie (H-sym) est vérifiée et que la matrice $A^{-1}\, M_A\, A$ est uniformément minorée. Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, alors pour tout $t \geq 0$:

$$A\,\nabla P_t f = Q_{t,A}^{M_A}(A\,\nabla f). \tag{4.71}$$

La preuve se fait facilement car $J(t) := A\nabla P_t f$ vérifie bien le problème de Cauchy et que la norme de $A\nabla P_t f$ dans $L^2(\mu, S)$ ne dépend pas de A. Elle est égale à celle de $\nabla P_t f$ dans $L^2(\mu, Id)$. On en déduit la nouvelle représentation de la variance :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f) \cdot \nabla P_t f \, d\mu \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f) \cdot S(A\nabla P_t f) \, d\mu \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f) \cdot S Q_{t,A}^{M_A}(A P_t f) \, d\mu \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f) \cdot S(-\mathcal{L}_A + M_A)^{-1}(A\nabla f) \, d\mu \end{aligned} \tag{4.72}$$

Puisque sous l'hypothèse (H-sym), l'opérateur $-\mathcal{L}_A$ est symétrique positif, si $AM_AA^{-1} > 0$ on a

$$(-\mathcal{L}_A + M_A)^{-1} \leq M_A^{-1}, \text{ dans } L^2(\mu, S)$$

ce qui finit la preuve de l'inégalité de Brascamp-Lieb généralisée.

Une autre preuve de l'inégalité de Brascamp-Lieb généralisée très proche mais qui n'utilise pas les semi-groupes est possible. Elle est basée sur le critère de Bakry-Emery intégré. L'inégalité de Poincaré avec constante λ est satisfaite si et seulement si le critère de Bakry-Emery intégré suivant est satisfait : pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_2(f,f)\, d\mu \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(f,f)\, d\mu,$$

Par invariance de la mesure et intégration par parties :, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Lf)^2\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_2(f,f).$$

Rappelons que dans notre cadre :

$$\Gamma_2(f,f) = \|\nabla\nabla f\|_{HS}^2 + (\nabla f)^T\, \nabla\nabla V\, \nabla f.$$

Sous la condition (H-sym), une intégration par parties permet alors d'écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Lf)^2\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla(A\nabla f)^T\, S\, \nabla(A\nabla f)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\, A^{-1}\, M_A\, A\, \nabla f\, d\mu \tag{4.73}$$

L'inégalité de Brascamp-Lieb généralisée s'obtient alors par un argument de dualité (voir par exemple [ABJ18] et les références).

Quelque part, l'idée de notre méthode est d'extraire de la positivité dans l'opérateur $-\mathcal{L}$ initial sur les formes et de la faire apparaître dans le nouveau terme d'ordre 0. De ce point de vue, l'intégration par parties précédente peut en fait s'écrire comme une inégalité de type Hardy pour l'opérateur $-\mathcal{L}$ sur les gradients.

Commençons par rappeler l'inégalité de type Hardy classique utilisé de manière intensive par Cattiaux et Guillin et leurs coauteurs [BCG08, CGWW09] :

Proposition 4.6. *Soit $w > 0$ une fonction régulière. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a*

$$\int \frac{-Lw}{w} f^2 d\mu \leq \int -Lf\, f\, d\mu.$$

Ici, nous obtenons :

Proposition 4.7. *Supposons que la condition de symétrie (H-sym) est satisfaite. Alors pour tout champ de vecteur $F \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a*

$$\int -L(A^{-1})AF \cdot F \, d\mu \leq \int -\mathcal{L}F \cdot F \, d\mu.$$

4.2 Lien avec l'inégalité de Poincaré et la formule de Chen et Wang en dimension 1

De manière directe, l'inégalité de Brascamp-Lieb généralisée implique une inégalité de Poincaré. On notera $\rho_A(x)$ la plus petite valeur propre de la matrice $\mathrm{Hess}V - L(A^{-1})A$ et

$$K_A := \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \rho_A(x).$$

Théorème 4.8. *[ABJ18]*
Supposons que la condition de symétrie (H-sym) est satisfaite et que $K_A > 0$. Alors le trou spectral $\lambda_1(-L, \mu)$ vérifie

$$\lambda_1(-L, \mu) \geq K_A. \tag{4.74}$$

En dimension 1, la condition de symétrie est automatiquement satisfaite. De plus, en notant $a(x)$ la fonction utilisée pour tordre le gradient, si $a^{-1} = h'$ avec h une fonction $\mathcal{C}^\infty$ tel que $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, un calcule donne :

$$M_a = \frac{(-Lh)'}{h'}.$$

Il est maintenant bien connu que, si elle existe, la première fonction propre g_1 de L est strictement croissante (voir par exemple le lemme 3.3 dans [BJ19]). Dans ce cas, en prenant $a^{-1} = g_1'$, on obtient que le potentiel M_a est constant égal à $\lambda_1(-L)$. Ainsi,

Théorème 4.9. *[CW97, BJ14, BJ19] [ABJ18]*
Soit $d\mu = e^{-V}dx$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ avec V de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\lambda_1(-L, \mu) = \sup_a \inf_{x \in \mathbb{R}} M_a(x). \tag{4.75}$$

où le supremum porte sur les fonctions $a > 0$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dans le cas où le trou spectral correspond au bas du spectre essentiel et n'est pas obtenu pour une vraie valeur propre, l'argument est donné dans [BJ19].Cet argument est similaire à ceux de la section 5.4 dans le cas discret. La question de savoir si le supremum est alors atteint reste ouverte.

En dimension supérieure, excepté pour le cas des mesures produits, la question de l'optimalité dans (4.74) reste ouverte. Il serait intéressant de regarder le cas d'un potentiel V convexe avec les symétries du cube.

En dimension 1, nous avons également traité le cas d'une métrique différente de la métrique euclidienne en considérant des opérateurs plus généraux [BJ14] :

$$L_\mu^\sigma f(x) = \sigma^2(x) f''(x) + ((\sigma^2)'(x) - \sigma^2(x)V'(x))f'(x).$$

Nous avons aussi traité le cas de segments puisque en dimension 1, la dérivée d'un semi-groupe de Neumann est un semi-groupe de Dirichlet. Dans le cas d'un segment, la formule de Chen-Wang pour la première valeur propre peut également s'obtenir par des arguments de type Sturm-Liouville. Nous avons aussi obtenu un critère un peu particulier pour log-Sobolev (à poids) :

$$\frac{C}{2}\,\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq \int_{\mathbb{R}} f'(x)^2 \sigma^2 dx. \tag{4.76}$$

Notons $c_{\mathrm{LS}}(\mu,\sigma)$ la constante plus grande constante C pour laquelle (4.76) est valable.

Théorème 4.10. *[BJ14]*
Soit $\mu = e^{-V}dx$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On suppose que l'opérateur de diffusion associé L_μ^σ est stochastiquement complet. Alors,

$$c_{\mathrm{LS}} \geq 2 \min\left(\sup\left\{\inf_x M_a : \sigma/a \in \mathcal{IC}_+^\infty(\mathbb{R}), \right\}, \sup\left\{\inf_x M_a : \sigma/a \in \mathcal{DC}_+^\infty(\mathbb{R}), \right\}\right).$$

avec $\mathcal{IC}_+^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{DC}_+^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions > 0 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ respectivement croissante et décroissante et telles que le semi-groupe $P_{a,t}$ est stochastiquement complet.

Ce résultat utilise le fait que pour obtenir l'inégalité de log-Sobolev pour toutes les fonctions, il suffit de la démontrer pour les fonctions monotones. Dans le cas où μ est de plus symétrique, on obtient en fait :

$$c_{\mathrm{LS}}(\mu,\sigma) \geq 2 \sup\left\{\inf_x M_a : \sigma/a \in \mathcal{IC}_+^\infty(\mathbb{R})\right\}.$$

Par rapport, au théorème écrit dans [BJ14], on a retiré la condition que $\frac{\sigma}{a}$ était borné supérieurement et inférieurement car avec les résultats de [ABJ18] (théorème 4.2), on sait que $|\nabla_a P_t f|$ est borné si $k_a := \inf_{x\in\mathbb{R}} M_a > -\infty$.

4.3 Inégalités de Brascamp-Lieb asymétriques

On revient au cas général de $\mathbb{R}^d$ mais on suppose ici qu'on tord le gradient par une fonction : i.e. $A(x) = a(x)Id$. L'hypothèse de symétrie (H-sym) est alors bien évidement satisfaite.

Théorème 4.11. *[ABJ18]*

Notons $\rho_a(x)$ la plus petite valeur propre de la matrice $M_a(x)$ et supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\rho_a(x) > 0$. Supposons également que l'opérateur que l'opérateur

$$L_a = \Delta - (\nabla V + \nabla \ln a^2) \cdot \nabla$$

est stochastiquement complet.

Alors pour toute $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$Cov_\mu(f,g) \leq \left\| \frac{|a\nabla g|}{\rho_a} \right\|_\infty \int \frac{|\nabla f|}{a} d\mu. \tag{4.77}$$

Ces inégalités asymétriques de Brascamp-Lieb ont été introduites par Menz et Otto en dimension 1 [MO13] puis par Carlen, Coredro-Erausquin et Lieb pour le cas uniformément convexe [CCEL13]. La preuve est basée sur la représentation de la covariance similaire à (4.72) et une représentation probabiliste du gradient du semi-groupe. Les calculs de (4.72) sont valables pour la covariance et avec $d\mu_a = \frac{1}{a^2} d\mu$, on a

$$\mathrm{Cov}_\mu(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} (a\,\nabla f)^T \, (-\mathcal{L}_a + M_a)^{-1} (a\,\nabla g)\, d\mu_a.$$

Ici $\mathcal{L}_a$ désigne l'opérateur diagonal agissant sur les champs de vecteurs :

$$\mathcal{L}_a = \begin{pmatrix} L_a & & \\ & \ddots & \\ & & L_a \end{pmatrix}.$$

Il est alors possible d'obtenir la représentation stochastique du gradient de type Feynman-Kac :

Théorème 4.12. *[ABJ18] Supposons que l'opérateur L_a soit stochastiquement complet et que la matrice M_a est uniformément borné inférieurement. Alors pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a*

$$a(x)\,\nabla P_t f(x) = \mathbb{E}\left[a(X_{t,a}^x)\, Y_{t,a,x}\, \nabla f(X_{t,a}^x) \right];$$

avec $X_{t,a}$ le processus stochastique de générateur L_a partant de x et où $Y_{t,a,x}$ est la matrice définie par :

$$\partial_t Y_{t,a,x} = -M_a(X_{t,a}^x) Y_{t,a,x}, \quad Y_{0,a,x} = Id.$$

Remarquons que l'équation différentielle vérifiée par $Y_{t,a,x}$ implique

$$|Y_{t,a,x}|_{\mathrm{op}} \leq e^{-\int_0^t \rho_a(X_{s,a}^x)\,ds}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

avec $|Y_{t,a,x}|_{\mathrm{op}}$ la norme d'opérateur de la matrice $Y_{t,a,x}$ par rapport à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. La preuve est basée sur une unicité du problème de Cauchy de l'équation de Schrödinger similaire à celle de la proposition 4.4 mais dans L^∞. Ce résultat d'unicité s'obtient par un argument de type martingale (voir proposition 4.6 dans [ABJ18]). Il est bien connu pour L_a sur les fonctions, une telle propriété est équivalente à la non explosion du processus stochastique $X_{t,a}^x$ et à la propriété $P_{t,a}1 = 1$.

Pour pouvoir utiliser cette unicité dans L^∞, la difficulté de la preuve consiste à montrer qu'a priori $a\nabla P_t f$ est bien borné. Cela peut se faire en suivant l'argument de [Bak86] (voir théorème 4.2 dans [ABJ18]).

On peut alors facilement majorer le semi-groupe sur les formes par celui sur les foncions et obtenir :

Lemme 4.13. *[ABJ18] Soit $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a*

$$|(-\mathcal{L}_a + M_a)^{-1}(a\,\nabla g)| \leq (-L_a^{\rho_a})^{-1}(|a\,\nabla g|),$$

On finit alors facilement la preuve de l'inégalité de Brascamp-Lieb asymétrique.

Cette inégalité fournit par exemple le résultat de concentration gaussienne :

Théorème 4.14. *Supposons de plus que $0 < \alpha \leq a \leq \beta$ et $\rho_a \geq k > 0$. Alors pour toute fonction f 1-Lipschitz et tout $h > 0$,*

$$\mu(|f - \mathbb{E}[f]| \geq h) \leq 2e^{-\frac{k\alpha}{\beta}h^2}.$$

Ce résultat n'est pas écrit dans [ABJ18]. La preuve s'obtient avec les arguments de [BGH01], en considérant pour f telle que $\mathbb{E}[f] = 0$, la dérivée de la transformée de Laplace :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[e^{tf}] = t\ \mathrm{Cov}(f, e^{tf})$$

et l'inégalité différentielle obtenue sous (4.77).

4.4 Inégalités de Brascamp-Lieb d'ordre 2

L'inégalité de Brascamp-Lieb admet des fonctions extrémales : il s'agit des fonctions $f(x) = \nabla V \cdot v + c$ avec v un vecteur fixe de $\mathbb{R}^d$ et $c \in \mathbb{R}$ une constante. De nombreux auteurs ont néanmoins proposé des versions affinées par des termes supplémentaires [CEFM04, Har08, KM17, KM18, BGG18, CE17].

Ici, nous proposons une approche un peu différente en utilisant la famille d'entrelacements avec les gradients $A\nabla$ et une inégalité d'ordre 2. L'idée sera de proposer dans la preuve de l'inégalité de Brascamp-Lieb généralisée une minoration du terme positif :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla g)^T\, S\, (-\mathcal{L}_A)(A\nabla g)\, d\mu.$$

Pour cela, on notera $\int_{\mathbb{R}^d} S\, d\mu$ la matrice obtenue en intégrant intégration coordonnée par coordonnée la matrice S et nous supposerons que ces entrées sont bien définies et que S reste définie positive. On définira alors pour tout $F \in L^2(\mu, S)$

$$m_S(F) := \left(\int_{\mathbb{R}^d} S\, d\mu\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} S\, F\, d\mu,$$

On notera $\mathcal{L}_A|_{\nabla_A}$ et $\mathcal{L}_A^{M_A}|_{\nabla_A}$ les opérateurs $\mathcal{L}_A|_{\nabla_A}$ et $\mathcal{L}_A^{M_A}|_{\nabla_A}$ restreint à l'ensemble $\{A\nabla f : f \in \mathcal{D}(L)\}$. On définit alors le trou spectral de l'opérateur $-\mathcal{L}_A$ dans $L^2(S, \mu)$ par la formule variationnelle :

$$\lambda_1^A|_{\nabla_A} \quad = \quad \inf \left\{ \frac{-\int_{\mathbb{R}^d} F^T\, S\, \mathcal{L}_A F\, d\mu}{\int_{\mathbb{R}^d} F^T\, S\, F\, d\mu} : F \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_A|_{\nabla_A}),\ \int_{\mathbb{R}^d} S\, F\, d\mu = 0 \right\}.$$

Théorème 4.15. *[BJ17]*

Supposons que A vérifie la condition de symétrie (H-sym) ainsi que les hypothèses précédentes. Supposons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la matrice symétrique $\lambda_1^A|_{\nabla_A} I + \nabla^2 V - \mathcal{L}A^{-1} A$ est définie positive. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et supposons qu'il existe $g \in \mathcal{D}(L)$ solution de l'équation de Poisson

$$Lg = f - \int f d\mu.$$

Alors l'inégalité de Brascamp-Lieb suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) \quad \leq \quad & \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\, \left(\lambda_1^A|_{\nabla_A} I + \nabla^2 V - \mathcal{L}A^{-1} A\right)^{-1}\, \nabla f\, d\mu \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} m_S(A\nabla g)^T\, S\, M_A\, m_S(A\nabla g)\, d\mu. \end{aligned}$$

Ce résultat reste assez abstrait. Il prend une forme intéressante lorsqu'on suppose plus que la matrice A^{-1} est la transposée de la matrice Jacobienne J_H d'un difféomorphisme H de $\mathbb{R}^d$. En effet, dans ce cadre, similairement à la dimension 1, un calcul donne :

$$\nabla^2 V - \mathcal{L}A^{-1} A = -J_{LH}^T\, (J_H^T)^{-1},$$

Ici, J_{LH} désigne donc la matrice Jacobienne de l'application :

$$LH = (LH_1, \ldots, LH_n)^T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d.$$

De plus la condition de centrage portant sur le gradient de g correspond alors à une orthogonalité entre la fonction f et les fonction H_i, $1 \leq i \leq n$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (A^T)^{-1}\, \nabla g\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} J_H\, \nabla g\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^d} H\, Lg\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^d} H\, f\, d\mu,$$

On obtient alors par le théorème min-max de Courant-Fisher une estimée inférieure pour la valeur propre λ_{d+1}.

Théorème 4.16. *[BJ17]*
Soit $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et posons $A^{-1} := (J_H^T)$. Supposons que les hypothèses du théorème 4.15 sont satisfaites et supposons que la matrice $-J_{\mathcal{L}H}^T\,(J_H^T)^{-1}$ est définie positive.

$$\lambda_{d+1}(-L) \quad \geq \quad \lambda_1^A|_{\nabla_A}\, I + \inf\, \rho(-J_{\mathcal{L}H}^T\,(J_H^T)^{-1}). \tag{4.78}$$

Des exemples pertinents dans un cadre non convexe de ce résultat seront donnés à la section 4.9. Pour ces exemples, on n'évaluera pas directement $\lambda_1^A|_{\nabla_A}$, mais la quantité plus petite

$$\lambda_1^A \geq \min_{1 \leq i \leq d} \lambda_1(\mu_i)$$

lorsque la matrice A est diagonale $A = diag(a_1, \ldots, a_d)$ et avec $d\mu_i := \frac{e^{-V}}{a_i^2} dx$.

Dans le cas, où l'on considère la commutation classique, on retrouve le résultat suivant reminiscent des travaux [CEFM04, CE17]

Corollaire 4.17. *Supposons que la matrice symétrique $\nabla^2 V + \lambda_1 I$ est définie positive. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$,*

$$\mathrm{Cov}_\mu(f, x_i) = 0,$$

alors f vérifie l'inégalité de Brascamp-Lieb d'ordre 2 :

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\, \left(\nabla^2 V + \lambda_1 I\right)^{-1}\, \nabla f\, d\mu. \tag{4.79}$$

Par conséquent :

$$\lambda_{d+1} \geq \lambda_1 + \inf\, \rho(\nabla^2 V), \tag{4.80}$$

L'estimée de valeur propre (4.80) est optimale pour la gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d$, ($V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$) pour laquelle $\lambda_1 = 1$ est de multiplicité d et $\lambda_{d+1} = 2$. La présence de la valeur propre $d+1$ est pertinente : en effet dans un cadre convexe, comme montré par Klartag [Kla09], l'espace propre associé à λ_1 est de dimension inférieure à d . Si le potentiel V présente de plus les symétries de l'hypercube, la dimension de l'espace propre est alors effectivement d.

4.5 L'entrelacement vu comme une transformation unitaire

L'entrelacement entre le gradient et l'opérateur de diffusion peut s'interpréter comme une transformation unitaire. Cette propriété reliant les opérateurs L et $\mathcal{L}^{\mathrm{Hess}V}$ a particulièrement été mise en évidence par Johnsen [Joh00]. Elle explique l'idée de la section précédente et elle sera utilisée de manière déterminante dans la section 4.6 en dimension 1.

Considérons $const^{\perp} := \mathcal{D}(\mathcal{L}) \cap \{f \in L^2(\mu) : f \perp 1\}$ et $\nabla_I = \{F \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^{\mathrm{Hess}V}), F = \nabla f\}$. La transfomation de Riesz $U := \nabla(-L)^{-1/2}$ est alors une transformation unitaire sur $const^{\perp}$ à valeurs dans $\mathcal{D}(\mathcal{L}^{\nabla^2 V}|_{\nabla_I})$. De plus sous certaines hypothèses identifiées par Johnsen (en particulier sous l'existence d'un trou spectral pour L) , les opérateurs L restreint à $const^{\perp}$ et $\mathcal{L}^{\mathrm{Hess}V}$ restreint à ∇_I sont unitairement équivalents :

$$\mathcal{L}^{\mathrm{Hess}V}|_{\nabla_I} = U\, L|_{const^{\perp}}\, U^{-1}. \tag{4.81}$$

En particulier leurs spectres coïncident. De plus, le passage de $\mathcal{L} - \mathrm{Hess}V$ à $\mathcal{L}_A - M_A$ s'obtenant par transformation de Doob, on obtient que les opérateurs $\mathcal{L} - \mathrm{Hess}V|_{\nabla_I}$ et $\mathcal{L}_A - M_A|_{\nabla_A}$ avec $\nabla_A := \{F \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_A^{M_A}), F = A\nabla f\}$ sont aussi unitairement équivalents. Par conséquent,

$$\sigma\left(-L|_{const^{\perp}}\right) = \sigma\left(-\mathcal{L}^{\nabla^2 V}|_{\nabla_I}\right) = \sigma\left(-\mathcal{L}_A^{M_A}|_{\nabla_A}\right). \tag{4.82}$$

4.6 Itération de l'entrelacement en dimension 1

On rappelle ici que $d\mu = e^{-V}dx$ sur $\mathbb{R}$ avec V un potentiel régulier est une mesure de probabilité et que $Lf = f'' - V'f'$. Pour toute fonction $a > 0$, on notera

$$L_a f = f'' - V_a' f' \text{ avec } V_a := V + \ln(a^2)$$

et pour toute fonction $b > 0$, on notera M_a^b le potentiel arrivant dans l'entrelacement :

$$b\partial L_a f = L_{ab}(b\partial f) - M_a^b(b\partial f).$$

En utilisant le résultat de Johnsen de la section précédente, on obtient une formule variationnelle de type Chen-Wang pour les valeurs propres d'ordre supérieur.

Théorème 4.18. *[BJ19]*
Soit $n \geq 1$, on a

$$\sup_{a_1,\dots,a_n} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in\mathbb{R}} M_{a_0\dots a_{i-1}}^{a_i}(x) \leq \lambda_n(-L) \leq \inf_{a_1,\dots,a_n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} M_{a_0\dots a_{i-1}}^{a_i}(x), \tag{4.83}$$

où $a_0 = 1$ *et où les supremum et infimum sont pris sur les* $a_1, \dots, a_n > 0, \mathcal{C}^\infty$ *tels que pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$,

∘ *la mesure* $\mu_{a_0 \dots a_{i-1}}$ *est finie ;*

∘ *le trou spectral* $\lambda_1(-L_{a_0 \dots a_{i-1}}) > 0$.

De plus, au moins dans le cas où le spectre de L est discret, on a en fait égalité dans (4.83).

Et en définissant récursivement :

$$a_i^{-1} = (g_1^{a_0 \dots a_{i-1}})' \tag{4.84}$$

où $g_1^{a_0 \dots a_{i-1}}$ *désigne la première fonction propre de l'opérateur de diffusion* $L_{a_0 \dots a_{i-1}}$, *on a*

$$\lambda_n(-L) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1(-L_{a_0 \dots a_{i-1}}). \tag{4.85}$$

Les λ_n ne sont pas forcément les vraies valeurs propres mais celles arrivant par le théorème min-max de Courant-Fisher. On rappelle que μ étant une probabilité $\lambda_0 = 0$. Le cas où λ_n correspond au bas du spectre essentiel est également traité dans [BJ19].

La preuve s'obtient par un argument récursif. L'idée étant que en dimension 1, pour $a_1 > 0$ l'opérateur $\mathcal{L}_{a_1}$ est encore un opérateur de diffusion sur les fonctions. D'où

$$\sigma(-L) - \{0\} = \sigma(-L_{a_1} + M^{a_1}) \geq \sigma(-L_{a_1}) + \inf_{x \in \mathbb{R}} (M^{a_1}(x)).$$

Puis de recommencer l'argument juste sur $-L_{a_1}$: étant donné $a_2 > 0$, on a

$$\sigma(-L_{a_1}) - \{0\} = \sigma(-L_{a_1 a_2} + M_{a_1}^{a_2}) \geq \sigma(-L_{a_1 a_2}) + \inf_{x \in \mathbb{R}} (M_{a_1}^{a_2}(x)).$$

L'optimalité s'obtient alors clairement en choisissant à chaque étape a_i^{-1} comme la dérivée de la première fonction propre de l'opérateur de diffusion $L_{a_0 \dots a_{i-1}}$. Ces propriétés montrent que les fonctions propres successives d'un opérateur de diffusion forment un système de Chebychev (voir [BJ19] pour plus de détails.)

Dans le cas uniformément convexe, on retrouve directement un résultat dû à Milman [Mil18] sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 4.19. *Supposons que* $\inf_{x \in \mathbb{R}} V''(x) > 0$. *Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \inf_{x \in \mathbb{R}} V''(x) \leq \lambda_n(-L) \leq n \sup_{x \in \mathbb{R}} V''(x).$$

Ce résultat peut s'interpréter en fait comme une comparaison entre le spectre de l'opérateur et celui d'un opérateur d'Ornstein-Ulhenbeck. De plus, dans le cadre uniformément convexe, le résultat de Johnsen fournit immédiatement un contrôle de l'écart entre les valeurs propres :

Théorème 4.20. *[BJ19]*

Supposons que $\inf_{x\in\mathbb{R}} V''(x) > 0$. *Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} V''(x) \leq \lambda_n(-L) - \lambda_{n-1}(-L) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} V''(x).$$

Dans un cadre non uniformément convexe, nous avons proposé un premier résultat pour obtenir une borne inférieure de l'écart entre λ_1 et λ_2.

Théorème 4.21. *[BJ19]*

Supposons que $\lambda_1(-L) \in \sigma_{disc}(-L)$. *Supposons que le potentiel* $V''/2 + (V')^2/4$ *a une dérivée seconde minorée par* $2\kappa^2$ *pour un certain* $\kappa > 0$, *alors :*

$$\lambda_2(-L) - \lambda_1(-L) \geq 2\kappa.$$

Ce résultat est basé sur le Théorème 6.1 dans [BL76] qui décrit des propriétés de convexité pour l'état fondamental (correspondant au bas du spectre) d'un opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}^d$. On en déduit la convexité de V_{a_1} pour $a_1^{-1} = g_1'$ avec g_1 la première fonction propre de L.

4.7 Une inégalité de type Veysseire

Dans un cadre riemannien, Veysseire [Vey10] a établi une estimée du trou spectral basée non plus sur une borne uniforme comme dans le critère de Bakry-Emery mais sur une borne intégrale de la courbure de Ricci. Pour $\mathbb{R}^d$, cette borne est donc valable dans un cadre strictement convexe et non plus uniformément convexe. Nous avons démontrée une version un peu plus générale dans [ABJ18]. La version classique s'écrit :

Théorème 4.22. *[Vey10, BJ14, ABJ18]*

Soit $d\mu = e^{-V}dx$ *une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}^d$ *et* L *l'opérateur de diffusion associé. Notons* $\rho(x)$ *la plus petite valeur propre de* $\mathrm{Hess}V$. *Alors*

$$\lambda_1(-L) \geq \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\rho}\, d\mu}. \tag{4.86}$$

Une preuve spectrale peut en être donnée. En voici les idées. Par le résultat de Johnsen, on a

$$\lambda_1(-L) = \sigma_0(-\mathcal{L} + \mathrm{Hess}V|_{\nabla_I}) \geq \sigma_0(-\mathcal{L} + \mathrm{Hess}V)$$

où σ_0 désigne le bas du spectre de l'opérateur.

Or la formulation variationnelle du bas du spectre, ainsi que l'inégalité de Poincaré usuelle, donnent

$$\begin{aligned}
\sigma_0(-\mathcal{L} + \mathrm{Hess}V) &= \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla F|^2 d\mu + \int_{\mathbb{R}^d} F \cdot \mathrm{Hess}V F d\mu;\ \int_{\mathbb{R}^d} |F|^2 d\mu = 1\right\} \\
&\geq \inf\left\{\lambda_1 \sum_i \left(\int_{\mathbb{R}^d} F_i^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^d} F_i d\mu\right)^2\right) + \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} \rho F_i^2 d\mu;\ \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} F_i^2 d\mu = 1\right\}
\end{aligned}$$

Par conséquent et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\geq \lambda_1 + \inf\left\{-\lambda_1 \sum_i \left(\int_{\mathbb{R}^d} F_i d\mu\right)^2 + \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} \rho F_i^2 d\mu;\ \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} F_i^2 d\mu = 1\right\} \\
&\geq \lambda_1 + \inf\left\{\sum_i \int_{\mathbb{R}^d} \rho F_i^2 d\mu \left(1 - \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\rho} d\mu\right);\ \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} F_i^2 d\mu = 1\right\}
\end{aligned}$$

L'infimum ci-dessus doit donc être négatif. Dans le cadre uniformément convexe, on en déduit alors l'estimée (4.86). De même que pour l'inégalité de Brascamp-Lieb, le résultat dans le cadre strictement convexe s'obtient par approximation.

Dans le théorème 3.3 de [ABJ18], nous avons étendu ce résultat pour des entrelacements généraux mais sous des hypothèses fortes. On suppose que la matrice S est bornée supérieurement et inférieurement : il existe $0 < \alpha \leq \beta$ tel que

$$\alpha Id \leq S \leq \beta Id$$

On suppose également que la plus petite valeur propre ρ_A de la matrice M_A vérifie $\inf_{x\in\mathbb{R}^d} \rho_A(x) > 0$. On obtient alors :

$$\lambda_1(-L,\mu) \geq \frac{1}{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu}{\rho_A}\right) + \frac{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\inf \rho_A}}.$$

4.8 Inégalités de Poincaré pour des mesures sphériques.

Dans cette partie, on considère le cas de mesures radiales dans $\mathbb{R}^n$. On a donc $d\mu = e^{-U(\|x\|)}dx$ avec $U : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. L'opérateur associé est donc

$$L_\mu f(x) = \Delta f(x) - \frac{U'(\|x\|)}{\|x\|}\, x \cdot \nabla f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

On dira que la mesure μ est log-concave radiale si de plus la fonction U est convexe sur $[0+\infty)$. Le résultat suivant est une amélioration d'un résultat de Bobkov [Bob03].

Théorème 4.23. *[BJM16b]*
On suppose que μ est une mesure log-concave radiale sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$. Alors le trou spectral $\lambda_1(-L_\mu)$ vérifie :

$$\frac{n-1}{\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2 \mu(dx)} \leq \lambda_1(-L_\mu) \leq \frac{n}{\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2 \mu(dx)}.$$

Dans le résultat initial de Bobkov [Bob03], un facteur $\frac{n}{12}$ apparaît au lieu de notre facteur $n-1$. Néanmoins le résultat de Bobkov montre déjà que les mesures log-concaves radiales vérifient la conjecture KLS [KLS95].

La preuve est basée sur le fait qu'une telle mesure n'est pas très loin d'une mesure produit. Cette idée se retrouve dans le lemme suivant qui compare la dynamique radiale et le trou spectral du Laplacien sur la sphère.

Théorème 4.24. *[Bob03, BJM16b]*

Soit μ une mesure de probabilité radiale sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Notons ν sa partie radiale c'est -à-dire la mesure sur $(0, +\infty)$ de densité proportionnelle à $r^{n-1}e^{-U(r)}$. Alors les trous du spectre de $\lambda_1(-L_\mu)$et $\lambda_1(-L_\nu)$ vérifient

$$\min\left\{\lambda_1(-L_\nu), \frac{n-1}{\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2 \mu(dx)}\right\} \leq \lambda_1(-L_\mu) \leq \min\left\{\lambda_1(-L_\nu), \frac{n}{\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2 \mu(dx)}\right\}.$$

Dans ce lemme, il faut noter que le facteur $n-1$ correspond au trou spectral du Laplacien sur la sphère. La borne supérieure s'obtient simplement en considérant d'une part des fonctions test radiales et d'autres part les fonctions linéaires dans la formulation variationnelle de l'inégalité de Poincaré. La borne inférieure s'obtient en s'inspirant de l'argument de tensorisation de l'inégalité de Poincaré pour les mesures produits.

L'amélioration du résultat de Bobkov s'obtient alors comme conséquence du résultat de Veysseire appliqué à la partie radiale de l'opérateur.

Lemme 4.25. *[BJM16b]*

Supposons que ν a une densité sur $\mathbb{R}_+$ proportionnelle à $r^{n-1}e^{-U(r)}$ $(n \geq 2)$ avec U une fonction convexe, alors :

$$\lambda_1(-L_\nu) \geq \frac{n-1}{\int_0^{+\infty} r^2 \nu(dr)}. \tag{4.87}$$

Dans [BJM16b], nous avons également étudié les inégalités de Poincaré à poids dans le cadre des mesure radiales. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ et avec $\sigma : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ un poids, on dira que l'inégalité de Poincaré à poids est satisfaite si pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\lambda \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|^2 \sigma^2 d\mu. \tag{4.88}$$

D'un point de vue markovien l'opérateur associé est

$$L_\mu^\sigma h(x) = \sigma^2(x)\Delta h(x) + \left(\nabla(\sigma^2)(x) - \sigma^2(x)\frac{U'(\|x\|)}{\|x\|}x\right) \cdot \nabla h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.89}$$

Nous ferons des hypothèses de régularité, d'ellipticité et surtout de complétude de la métrique associée à σ.

Dans le cas où le poids σ est lui même radial, la partie radiale de L^σ_μ s'écrit :

$$L^\sigma_\nu g(r) := \sigma^2(r)g''(r) + b(r)g'(r), \quad r > 0, \tag{4.90}$$

avec b la dérive

$$b(r) := (\sigma^2)'(r) - \sigma^2(r)\left(V'(r) - \frac{n-1}{r}\right), \quad r > 0.$$

Dans ce cadre la généralisation du théorème 4.24 est donnée par :

Théorème 4.26. *[BJM16b]*
Soit μ une mesure de probabilité radiale sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) et σ un poids sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses précédentes. Alors les trous du spectre de $-L^\sigma_\mu$ et $-L^\sigma_\nu$ vérifient

$$\min\left\{\lambda_1(-L^\sigma_\nu), \frac{n-1}{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|x\|^2}{\sigma^2(x)}\mu(dx)}\right\} \leq \lambda_1(-L^\sigma_\mu) \leq \min\left\{\lambda_1(-L^\sigma_\nu), \frac{n\int_{\mathbb{R}^n}\sigma^2(x)\mu(dx)}{\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|^2\mu(dx)}\right\}. \tag{4.91}$$

4.9 Exemples classiques

Dans le cadre unidimensionnel ou dans celui $\mathbb{R}^n$ les exemples classiques que nous avons principalement étudiés sont les mesures de Subbotin μ_α , $\alpha \geq 1$ de densités proportionnelles à $e^{\frac{-|x|^\alpha}{\alpha}}$. Nous nous sommes également intéressé aux inégalités de Poincaré à poids et ce de manière particulièrement précise pour la gaussienne (qui correspond à $\alpha = 2$) et pour les mesures de Cauchy généralisées μ_β dont la densité est proportionnelle à

$$\frac{1}{(1+|x|^2)^\beta} = \exp(-\beta\ln(1+|x|^2)),\ \beta > \frac{n}{2}.$$

Nous avons également considéré le "double puits" dont le potentiel est donné par $V_\delta(x) = \frac{|x|^4}{4} - \delta\frac{|x|^2}{2}$.

Dans le cas de la dimension 1, pour évaluer le trou spectral, nous pouvons donc utiliser l'approche liée à la formule de Chen et Wang ainsi que l'estimée de Veysseire dans le cadre convexe. Notons également le résultat de Muckenhoupt qui encadre le trou spectral à un facteur 8 (voir par exemple [BGL14]). Même si le résultat de Muckenhoupt établit une équivalence avec l'inégalité de Poincaré, il n'est pas forcément facile de calculer exactement le supremum qui y apparaît.

Détaillons un des des exemples obtenus. Le comportement des mesures de Subbotin est très différent suivant que $\alpha \in (1,2]$ ou $\alpha \geq 2$. Dans tous les cas, le potentiel V_α est convexe mais pour $\alpha \in [1,2)$ on a un manque de convexité uniforme à l'infini tandis que pour $\alpha \geq 2$, on a un manque de convexité uniforme au voisinage de 0.

Théorème 4.27. *[BJ14, BJM16a]*

Soit μ_α une mesure de Subbotin pour $\alpha \geq 1$,

Si $1 \leq \alpha < 2$, alors

$$\max\left\{\frac{\alpha^2}{4}, (\alpha-1)\alpha^{1-2/\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}-1\right)}\right\} \leq \lambda_1(\mu_\alpha) \leq \frac{1}{3-\alpha}\alpha^{1-2/\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}-1\right)} \leq 2^{1-\frac{2}{\alpha}}. \tag{4.92}$$

Si $2 \leq \alpha < 3$, alors

$$\max\left\{\frac{2(1+\alpha)^{1-2/\alpha}}{\alpha}, (\alpha-1)\alpha^{1-2/\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}-1\right)}\right\} \leq \lambda_1(\mu_\alpha) \leq \frac{1}{3-\alpha}\alpha^{1-2/\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}-1\right)} \leq 3^{1-\frac{2}{\alpha}}. \tag{4.93}$$

Si $\alpha \geq 3$, alors

$$\frac{2(1+\alpha)^{1-2/\alpha}}{\alpha} \leq \lambda_1(\mu_\alpha) \leq \alpha^{1-2/\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)} \leq 3^{1-\frac{2}{\alpha}}. \tag{4.94}$$

L'estimée supérieure est juste obtenue avec la fonction test x. L'estimée inférieure avec la fonction Γ est obtenue par l'estimée de Veysseire [BJ14]. Cette estimée n'est valable que pour $1 \leq \alpha < 3$. Les 2 autres estimées inférieures sont obtenues pour des fonctions bien choisies avec la méthode de Chen-Wang. Dans les deux cas l'estimée de Veysseire est meilleure pour α proche de 2 et elle est moins bonne pour α proche de 1 ou α suffisamment grand et supérieure à 2.

On rappelle de manière générale que, pour μ une mesure de probabilité et si σ sigma est un poids, on considère :

$$L_\mu^\sigma f(x) = \sigma^2(x)f''(x) + ((\sigma^2)'(x) - \sigma^2(x)V'(x))f'(x).$$

Pour $\varepsilon \in [0,1)$ le choix $a^{-1} = h' = \frac{e^{\varepsilon V}}{\sigma^2}$ produit le potentiel :

$$M_a = (1-\varepsilon)\sigma^2\left(V'' + \varepsilon V'^2\right). \tag{4.95}$$

Ceci produit la borne inférieure $\frac{\alpha^2}{4}$pour $\alpha \in (1,2]$ [BJM16a].

Pour $\alpha \geq 2$, la borne inférieure [BJM16a] est obtenue en considérant $a^{-1} = h'$ avec h la solution de l'équation de Poisson

$$-L_\mu h = x.$$

Un autre exemple précis obtenu est celui de Poincaré à poids optimal pour la gaussienne usuelle sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4.28. *[BJM16a]*

Notons γ la mesure gaussienne standard et σ le poids $\sigma^2(x) = 1/(1+b|x|^2)$, alors pour $b > 0$ la meilleure constante dans l'inégalité de Poincaré à poids :

$$\lambda \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{f'(x)^2}{1+bx^2}\mu(dx).$$

est donnée par :

$$\lambda_1(-L^\sigma_\gamma) = \begin{cases} 1-b & si \quad 0<b<1/2; \\ 1/4b & si \quad b \geq 1/2. \end{cases}$$

Le cas des mesures de Cauchy pour le poids $\sigma^2(x) = 1+|x|^2$ est également traité en dimension 1 dans [BJM16a].

Dans le cas du double puits, une borne explicite est proposée pour δ suffisamment petit [BJ14] : $\lambda_1 \geq \sqrt{\frac{3}{2}} - \delta$.

Une borne numérique pour la constante de log-Sobolev déduite du théorème 4.10 est proposée pour le double puits dans [BJ14].

Dans le cas de la dimension $n \geq 2$, on peut proposer des estimées basées sur le résultat obtenu par les entrelacements 4.74 généralisant la formule de Chen et Wang en dimension 1, les résultats pour les mesures radiales de la section 4.8 et le résultat de Veysseire (4.86).

Par exemple, dans le cas d'un potentiel radial, on obtient par les entrelacements la formule de Poincaré à poids [ABJ18] :

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla f(x)|^2}{\min\left\{U''(|x|), \frac{U'(|x|)}{|x|}\right\} - a(x)\, La^{-1}(x)}\, d\mu(x).$$

que l'on utilise pour obtenir directement des inégalités à poids pour les mesures de Subbotin, gaussiennes et de Cauchy.

En utilisant les résultats sur les mesures radiales, on obtient des résultats très précis sur les inégalités de Poincaré classiques pour les mesures de Subbotin, ainsi que pour des inégalités de Poincaré à poids pour la gaussienne et pour les mesures de Cauchy généralisées. Par exemple, pour les mesures de Cauchy, on est capable de calculer explicitement le trou spectral de la dynamique (à poids) radiale et on obtient :

Corollaire 4.29. *[BJM16b]*

Soit μ une mesure de Cauchy de paramètre β sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$et σ le poids radial $\sigma^2(x) := 1 + \|x\|^2$. Alors les trous de spectre de l'opérateur L^σ_μ et de sa partie radiale L^σ_ν vérifient :

∘ *pour $n/2 < \beta \leq n/2+2$,*

$$\lambda_1(-L^\sigma_\mu) = \lambda_1(-L^\sigma_\nu) = \left(\beta - \frac{n}{2}\right)^2;$$

∘ *pour $2+n/2 < \beta \leq n(n+2)/(n+1)$,*

$$\lambda_1(-L^\sigma_\mu) = \lambda_1(-L^\sigma_\nu) = 4\left(\beta - \frac{n}{2} - 1\right);$$

∘ *pour* $n(n+2)/(n+1) < \beta \le n+1$,

$$\frac{2\beta(n-1)}{n} \le \lambda_1(-L_\mu^\sigma) \le \lambda_1(-L_\nu^\sigma) = 4\left(\beta - \frac{n}{2} - 1\right);$$

∘ *pour* $\beta > n+1$,

$$\frac{2\beta(n-1)}{n} \le \lambda_1(-L_\mu^\sigma) \le 2(\beta-1) < \lambda_1(-L_\nu^\sigma) = 4\left(\beta - \frac{n}{2} - 1\right).$$

Ces mesures de Cauchy ont été aussi étudiées dans [BL09]. Notons que par des arguments totalement différents (liés à une approche dimensionnelle du théorème de Prékopa) Nguyen [Ngu14] a obtenu que pour $\beta \ge n+1, \lambda_1(-L_\mu) = 2(\beta-1)$

Sur cet exemple, suivant les valeurs du paramètre β, on a une interversion des valeurs propres correspondant aux fonctions linéaires et aux fonctions quadratiques. Ainsi on peut noter que si β appartient à une certaine plage, la première fonction propre est donnée par $g_1(x) = |x|^2 - C$ pour un certain $C \in \mathbb{R}$, fonction qui n'est clairement pas croissante dans toutes les directions.

Notons également que pour $\beta = n+1$, l'espace propre associé à λ_1 contient les fonctions linéaires ainsi que la fonction quadratique ci-dessus et est de dimension $n+1$.

Proposons maintenant une estimée des valeurs propres d'ordre supérieur pour les mesures de Subbotin en dimension 1. Pour cela on sépare encore une fois les cas $\alpha \in (1,2]$ et $\alpha \ge 2$, le cas $\alpha = 2$ étant celui bien connu de la gaussienne. Rappelons que le spectre n'est discret que pour $\alpha > 1$.

Théorème 4.30. *[BJ19]*

Soit $\alpha \in (1,2]$ et μ_α la mesure de Subbotin correspondante : Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_{\alpha,\varepsilon}$ telle que pour tout $n \ge 1$ la n-ème valeur propre vérifie :

$$\lambda_n(-L) \ge C_{\alpha,\varepsilon}\, n^{2-2/\alpha-\varepsilon}. \tag{4.96}$$

Ce résultat s'obtient en itérant les entrelacements. A chaque étape, similairement, à (4.95), on choisit ε_i et $a_i = e^{\varepsilon_i V_{i-1}}$.

Théorème 4.31. *[BJ19]*

Soit $\alpha \ge 2$ et μ_α la mesure de Subbotin correspondante : Alors, il existe une constante C_α telle que pour tout $n \ge 1$ la n-ème valeur propre vérifie :

$$\lambda_n(-L) \ge C_\alpha\, n^{2-2/\alpha}. \tag{4.97}$$

Dans ce cas $\alpha \ge 2$, le potentiel étant plus convexe que la gaussienne à l'infini, ce théorème s'obtient par un seul entrelacement et une comparaison avec les opérateurs d'Ornstein-Uhlenbeck (voir théorème 4.3 dans [BJ19]).

Remarquons également que ce théorème est en accord avec la loi de Weyl qui décrit une asymptotique des valeurs propres.

L'idée précédente peut être également à appliquer à des exemples dégénérés comme celui du potentiel

$$V(x) = \frac{x^2}{2} + \alpha \sin(\beta x^2) \text{ ou } V(x) = \frac{x^2}{2} + \alpha\sqrt{1+|x|}\sin(\beta x^{\frac{3}{2}}), \quad x \in \mathbb{R},$$

vérifiant $\liminf_{|x|\to+\infty} V''(x) = -\infty$ [BJ19].

4.10 Exemples de systèmes de particules en interaction

Dans cette section, on considère des perturbations de mesures produit, c'est-à-dire des potentiels de la forme :

$$V(x) := \sum_{i=1}^{d} U_i(x_i) + \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

Ce genre de potentiel a été beaucoup étudié dans la littérature [Hel98, Hel99, Led01, GR01, Che08]. Ici, nous allons présenter des résultats pour des modèles particuliers pour lesquels, à notre connaissance (voir la discussion dans [BJ17]), les résultats de la littérature ne s'appliquent pas. Nous montrons que ces modèles possèdent un trou spectral indépendant du nombre de particules. Nous obtenons également des résultats sur la valeur propre d'ordre supérieure λ_{d+1}.

Le premier résultat concerne une perturbation de la mesure gaussienne par un terme quartique :

Proposition 4.32. *[BJ17]*
Soit V le potentiel

$$V(x) := \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^2}{2} + J \sum_{i=1}^{d} x_i^2\, x_{i+1}^2, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec J un paramètre positif. Alors, les estimées spectrales suivantes sont satisfaites :

- $\lambda_1 \geq \frac{1+\sqrt{1-16J}}{2}$ *pour tout* $0 \leq J \leq \frac{1}{16}$;
- $\lambda_{d+1} \geq \frac{1+\sqrt{1-16J}}{2} + \frac{\sqrt{1-16J}+\sqrt{1-32J}}{2}$ *pour tout* $0 \leq J \leq \frac{1}{32}$.

Le terme d'interaction est ici loin d'être convexe. On peut d'ailleurs montrer que lorsque $J \to +\infty$ (à dimension fixe), le trou spectral associé tend vers 0. Néanmoins, ce terme d'interaction se comporte bien par rapport à la mesure produit au sens où, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$U_i'(x)\partial_i\phi(x) > 0.$$

Le second résultat concerne une perturbation lipschitzienne d'une mesure produit de Subbotin.

Proposition 4.33. *[BJ17]*
Soit V le potentiel

$$V(x) := \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^a}{a} + J \sum_{i=1}^{d} |x_i - x_{i+1}|, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec $a \in (1,2]$et J un paramètre positif.. Alors, les estimées spectrales suivantes sont satisfaites :
- $\circ$ $\lambda_1 \geq \frac{a(3a-2)}{8} - 2J^2$ *pour tout* $J \in [0, \sqrt{a(3a-2)}/4]$ *;*
- $\circ$ $\lambda_{d+1} \geq \frac{a(3a-2)(1+(a-1)^{2/a})}{8} - 4J^2$ *pour tout* $J \in [0, \sqrt{a(3a-2)(a-1)^{2/a}}/4]$.

Notons cependant que par notre méthode étant globale ; nous n'avons pas réussi à retrouver des résultats pour des modèles classiques

$$V(x) := \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^4}{4} + \beta \sum_{i=1}^{d} x_i \, x_{i+1}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

en toute dimension (voir par exemple [Led01]). Nous avons juste obtenu dans [ABJ18] un résultat partiel en dimension 2.

4.11 Perspectives

Dans ce domaine, une grande conjecture est la conjecture KLS qui prévoit que pour un potentiel convexe, l'opérateur associé possède un trou spectral minoré par une constante qui ne dépend que de sa matrice de covariance, et en particulier qui ne dépend pas de sa dimension. Il est sans doute illusoire d'espérer que notre méthode puisse être utiliser pour démontrer cette conjecture, mais cette méthode peut possiblement permettre de trouver de nouveaux exemples de familles de mesure vérifiant la conjecture KLS ou d'autres exemples de systèmes de spin vérifiant un trou spectral indépendant de la dimension.

Les liens avec la concentration doivent étudiés de manière plus poussée. Par exemple, est-il possible d'établir une inégalité asymétrique de Brascamp-Lieb L^p, L^q permettant d'établir des régimes de concentration entre la concentration gaussienne et la concentration exponentielle ?

Une question importante également celle de l'optimalité pour Poincaré en dimension supérieure : par exemple dans le cas d'un potentiel convexe sur $\mathbb{R}^d$ possédant les symétries du cube, on sait que l'espace propre associé à λ_1 est exactement de dimension d. Et formellement, on peut construire un potentiel M_A qui serait constant à $\lambda_1 Id$, le problème étant qu'on ne sait pas montrer que la matrice A est inversible en tout point et vérifie la condition de symétrie.

Une autre perspective consiste à proposer une nouvelle preuve en dimension supérieure du résultat de Milman qui compare toutes les valeurs propres à celles d'un opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck. La preuve en serait basée bien sur l'itération des entrelacements ; la difficulté étant que ce coup-ci les opérateurs successifs agissent sur des espaces dont la dimension augmente.

Enfin, la méthode et les résultats précédents passent aux variétés riemanniennes comme le montre Baptiste Huguet (article en finition). Le cas des variétés à bords devrait également être étudié.

Serait-il alors possible d'obtenir des résultats du type de Milman pour d'autres variétés comme la sphère (ou peut-être plus raisonnablement comme une projection d'une sphère), espaces où les vecteurs propres correspondent à des polynômes (voir les conjectures dans [Mil18]).

Une autre question concerne la complétude stochastique. Le fait d'obtenir un potentiel minoré n'implique pas la complétude stochastique comme on peut le voir en dimension 1 en prenant $a^{-1} = e^V$, on obtient alors toujours $M_a = 0$. Qu'en est-il par contre lorsqu'il existe a tel que M_a soit uniformément minoré par une quantité positive ?

5 Etude spectrale de Laplaciens discrets

L'étude des Laplaciens discrets infinis est au carrefour entre théorie spectrale et géométrie. Un rôle particulier est joué par le bas du spectre et le bas du spectre essentiel du Laplacien. Un lien important apparaît à travers des inégalités isopérimétriques (aussi appelées inégalités de Cheeger) voir par exemple [BHJ14, BKW15, Dod84, Dod06, DK86, Fuj96, Moh88, Moh91, KL12, Woj08].

Ici nos résultats seront basés sur une inégalité de Hardy et l'étude des fonctions super harmoniques. Dans les sections 5.1 à 5.7, on améliorera principalement des résultats de Keller, Lenz et Wojciechowski [KLW13].

5.1 Cadre et notation

On travaillera dans le contexte des Laplaciens discrets infinis pondérés. On considère donc un graphe $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ où $\mathscr{V}$ désigne un ensemble dénombrable de sommets, $\mathscr{E}$ est une fonction symétrique positive $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ et m un poids strictement positif sur $\mathscr{V}$. On dit alors que deux points $x, y \in \mathscr{V}$ sont voisins si $\mathscr{E}(x,y) = \mathscr{E}(y,x) > 0$ et on écrit alors $x \sim y$. On fait l'hypothèse que le graphe est localement fini dans le sens où tout point a un nombre fini de voisins.

Soit $\mathcal{C}_c(\mathscr{V})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathscr{V} \to \mathbb{C}$ à support fini et soit $\ell^2(\mathscr{V}, m)$ l'espace de Hilbert formé des fonctions $f : \mathscr{V} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\|f\|_{\ell^2(\mathscr{V},m)} := \sum_{x \in \mathscr{V}} |f(x)|^2 m(x) < +\infty.$$

On notera le produit scalaire sous-jacent comme :

$$\langle f, g\rangle_m := \sum_{x\in\mathscr{V}} \overline{f(x)} g(x) m(x) \text{ pour } f, g \in \ell^2(\mathscr{V}, m).$$

Pour tout $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathscr{V})$, on introduit la forme quadratique (positive)

$$Q(f, g) := \frac{1}{2} \sum_x \sum_y \mathscr{E}(x, y) \overline{(f(x) - f(y))} \left(g(x) - g(y)\right).$$

Cette forme est fermable et il existe un unique opérateur auto-adjoint $\Delta_{\mathscr{G}}$ (l'extension de Friedrichs) tel que

$$Q(f, f) = \langle f, \Delta_{\mathscr{G}} f\rangle_m$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\mathscr{V})$.

Pour toute fonction f à support fini, il s'écrit

$$\Delta_{\mathscr{G}} f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in\mathscr{V}} \mathscr{E}(x, y) \left(f(x) - f(y)\right). \tag{5.98}$$

On introduit alors respectivement le *degré sans poids* : pour $x \in \mathscr{V}$,

$$\eta(x) := \sum_{y, y\sim x} \mathscr{E}(x, y)$$

et le *degrés à poids* :

$$\deg(x) := \frac{\eta(x)}{m(x)}.$$

Attention, ici dans le cadre discret, le Laplacien choisi est positif. De plus au sens des formes on a les bornes :

$$0 \leq \Delta \leq 2 \deg. \tag{5.99}$$

Le domaine des formes de $\mathcal{D}(\Delta_{\mathscr{G}}^{1/2})$ est la complétion de $\mathcal{C}_c(\mathscr{V})$ muni de la norme $\|\cdot\| + Q(\cdot, \cdot)^{1/2}$.

Ici, nous ne nous sommes pas spécifiquement placés dans un cadre essentiellement auto-adjoint, mais nous avons considéré l'extension minimale (i.e de Friedrichs) de l'opérateur sur $\mathcal{C}_c(\mathscr{V})$.

Dans ce cadre, le bas du spectre essentiel de $\Delta_{\mathscr{G}}$ est décrit par le comportement de l'opérateur à l'infini : le lemme de Persson donne (voir par exemple [KL10][Proposition 18]) :

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(\Delta_{\mathscr{G}}) = \sup_{\mathscr{K}\subset\mathscr{V}\text{finite}} \inf \sigma \left(\Delta_{\mathscr{G}}^{\mathscr{K}^c}\right) \tag{5.100}$$

où $\Delta_{\mathscr{G}}^{\mathscr{K}^c}$ désigne le Laplacien de Dirichlet sur le complémentaire de l'ensemble fini $\mathscr{K}$.

Dans le cas où on choisit $m(x) = \eta(x)$, ou de manière équivalente lorsque $\deg \equiv 1$, on appelle l'opérateur Δ_η le *Laplacien normalisé*. Lorsque $m \equiv 1$ et que le graphe est *simple*, i.e.$\mathscr{E} : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \{0, 1\}$, on appelle l'opérateur Δ_1 le *Laplacien combinatoire*.

5.2 L'inégalité de Hardy

Décrivons maintenant l'inégalité de Hardy qui constitue notre outil principal. Cette inégalité est bien connue. Elle est similaire à celle de la proposition 4.6 dans le cadre continu. Dans ce cadre discret, elle a été récemment utilisée dans les travaux [Gol14, HK11].

Mentionnons également d'autres techniques pour borner inférieurement le Laplacien par un potentiel [CdVTHT11a, CdVTHT11b, MT16].

Proposition 5.1 (Inégalité de Hardy)**.** *[HK11, Gol14, BG15]*

Soit W une fonction strictement positive sur $\mathscr{V}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\mathscr{V})$,

$$Q(f, f) = \langle f, \Delta_m f \rangle_m \geq \langle f, \frac{\tilde{\Delta}_m W}{W} f \rangle_m. \tag{5.101}$$

Notons cependant une différence. Dans le cadre continu de [BCG08, CGWW09], la mesure est finie et pour étudier le trou du spectre, les fonctions W tendent vers l'infini et contrôlent un temps de retour vers les compacts (voir [CGZ13]). Tandis qu'ici, on utilisera des fonctions W qui tendent vers 0 à l'infini et qui décrivent à quelle vitesse on part vers l'infini (voir théorème 5.10).

De manière directe, l'inégalité de Hardy établit un lien entre les fonctions super harmoniques et le bas du spectre et du spectre essentiel. Mentionnons aussi l'approche développée par F.Y. Wang [Wan00] au moyen des inégalités de super-Poincaré pour minorer le bas du spectre essentiel.

Théorème 5.2. *[BG15]*

Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ un graphe pondéré.

a) *S'il existe $\lambda \geq 0$ et $W : \mathscr{V} \to (0, +\infty)$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathscr{V}$,*

$$\Delta_{\mathscr{G}} W(x) \geq \lambda W(x).$$

Alors

$$\inf \sigma(\Delta_{\mathscr{G}}) \geq \lambda.$$

b) *S'il existe deux fonctions $\lambda : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ et $W : \mathscr{V} \to (0, +\infty)$ telles que pour tout $x \in \mathscr{V}$,*

$$\Delta_{\mathscr{G}} W(x) \geq \lambda(x) W(x).$$

Alors

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(\Delta_{\mathscr{G}}) \geq \liminf_{|x| \to +\infty} \lambda(x).$$

5.3 Une décomposition 1-dimensionnelle du graphe

L'idée est donc maintenant de proposer des conditions géométriques suffisantes pour établir l'existence de fonctions super harmoniques. Pour cela, on commence par introduire le concept de décomposition 1-dimensionnelle d'un graphe.

Définition 5.3. *[KLW13, BG15] Une* décomposition 1-dimensionnelle *d'un graphe $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ est une famille d'ensembles finis $(S_n)_{n\geq 0}$ qui forment une partition de $\mathscr{V}$ et telle que pour tout $x \in S_n, y \in S_m$,*

$$\mathscr{E}(x,y) > 0 \implies |n-m| \leq 1.$$

On note alors $|x| := n$ si $x \in S_n$ ainsi que $B_n := \cup_{k=0}^{n} S_k$.

L'exemple typique est donné par les ensembles de niveau de la distance combinatoire du graphe à un ensemble fini S_0. Cette définition apparaît dans [KLW13] mais avec S_0 un singleton.

Adapté à cette décomposition du graphe, on introduira les notations : pour $x \in S_n$,

$$\eta_{\pm}(x) := \sum_{y \in S_{n\pm 1}} \mathscr{E}(x,y), \quad \eta_0(x) := \sum_{y \in S_n} \mathscr{E}(x,y)$$

ainsi que :

$$\deg_a(x) := \frac{\eta_a(x)}{m(x)}, \qquad \text{pour } a \in \{0, -, +\}.$$

Bien évidemment, on a :

$$\eta(x) := \eta_0(x) + \eta_-(x) + \eta_+(x) = \sum_{y \in \mathscr{V}} \mathscr{E}(x,y)$$

et

$$\deg(x) := \frac{\eta(x)}{m(x)} = \deg_-(x) + \deg_0(x) + \deg_+(x).$$

On définit maintenant une classe de graphes à symétrie radiale faible.

Définition 5.4. *[KLW13, BG15] Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$un graphe pondéré et soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une décomposition 1-dimensionnelle de $\mathscr{G}$. On dit que $\mathscr{G}$ est* à symétrie radiale faible *par rapport à $(S_n)_{n\geq 0}$ si les quantités* $\deg_+(x)$ *et* $\deg_-(x)$ *dépendent seulement de $|x|$.*

Le point intéressant à remarquer ici est qu'aucune condition n'est donnée sur $\deg_0$. On verra dans le théorème 5.12 que le bas du spectre et du spectre essentiel ne dépendent effectivement pas des valeurs de $\deg_0$, c'est-à-dire ne dépendent pas du nombre d'arêtes à l'intérieur de chaque "sphère" S_n.

Le théorème suivant fournit alors de telles conditions géométriques. L'amélioration par rapport à [KLW13] est qu'ici les conditions ne dépendent pas de $\deg_0$.

Théorème 5.5. *[BG15]*

Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ un graphe pondéré. Supposons qu'il existe une décomposition 1-dimensionnelle de $\mathscr{G}$ et une constante $c > 1$ telle que :

$$l := \liminf_{|x|\to\infty} \big(\deg_+(x) - c\,\deg_-(x)\big) > 0 \tag{5.102}$$

Alors il existe une fonction super harmonique W telle que

$$\tilde{\Delta}_m W(x) \geq \phi_c W(x), \quad \textit{pour tout } x \in \mathscr{V}, \tag{5.103}$$

avec

$$\phi_c(x) := \frac{c-1}{c}(\deg_+(x) - c\,\deg_-(x))\mathbf{1}_{B^c_{n_0}} \geq 0. \tag{5.104}$$

et $n_0 := \inf\{n \in \mathbb{N}, \deg_+(x) - c\,\deg_-(x) \geq 0, \forall |x| \geq n\}$. En particulier, on a $\sigma_{\rm ess}(\Delta_m) \geq l(c-1)/c$ et $\sigma_{\rm ess}(\Delta_m) = \emptyset$ si $l = \infty$.

Dans ce cadre discret, la minoration par un potentiel dans l'inégalité de Hardy conduit directement à des bornes inférieures des valeurs propres. Ainsi le théorème 5.5 permet d'obtenir des asymptotiques des valeurs propres. Ce résultat est une amélioration de [Gol14] qui considère le cas de perturbations d'arbres.

Théorème 5.6. *Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ un graphe pondéré et supposons qu'il existe une décomposition 1-dimensionnelle de $\mathscr{G}$ telle que :*

$$\lim_{|x|\to\infty} \deg_+(x) = \infty, \quad \textit{et} \quad \max(\deg_-(x), \deg_0(x)) = o(\deg_+(x)), \tag{5.105}$$

quand $|x| \to \infty$, alors $\mathcal{D}(\Delta_m^{1/2}) = \mathcal{D}(\deg^{1/2}(\cdot))$, $\sigma_{\rm ess}(\Delta_m) = \emptyset$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\Delta_m)}{\lambda_n(\deg(\cdot))} = 1. \tag{5.106}$$

L'obtention de la borne supérieure nécessite le résultat (5.116) ci-dessous (voir aussi [BGK15, Lemme 2.9]) . Le résultat du théorème 5.5 est à la base de l'étude des graphes creux [BGK15].

Une autre possibilité pour obtenir des bornes supérieures est le théorème du min -max et le choix de bonnes fonctions tests. Nous avons ainsi répondu (Proposition 4.16 dans [BG15]) à une question de [Fuj96] sur l'existence de suites de valeurs propres pour le Laplacien normalisé lorsque le spectre essentiel est réduit au singleton $\{1\}$.

Nous avons aussi construit un graphe pour lequel $\sigma_{\rm ess}(\Delta_\eta) = \{1\}$ mais $\liminf_{|x|\to\infty} \eta(x) < +\infty$. Sur cet exemple, la décomposition 1-dimensionnelle n'est pas obtenu directement à l'aide de la distance combinatoire dans le graphe.

Dans le cas des arbres à symétrie radiale, nous proposons alors les estimées suivantes pour les valeurs propres :

Théorème 5.7. *Soit $\mathscr{T} := (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ un arbre radial simple*

1. *Pour le Laplacien normalisé, i.e.m $= \eta$. Supposons que $\eta(n) \to +\infty$ en croissant quand $n \to \infty$. Alors*

$$\sigma_{\text{ess}}(\Delta_\eta) = \{1\} \text{ and } \sigma(\Delta_\eta) = \{1\} \cup \{\lambda_i(\Delta_\eta), 2 - \lambda_i(\Delta_\eta), i \geq 1\},$$

avec $(\lambda_i(\Delta_\eta))_{i\geq 1}$ une suite infinie de valeur propre croissante tendant vers 1. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $n \geq n(\varepsilon)$, on a :

$$1 - 2\sqrt{\frac{1}{\eta(n)}} \leq \lambda_{(\#B_{n-1}+1)}(\Delta_\eta) \leq \lambda_{\#S_n}(\Delta_1) \leq 1 - \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\eta(n+1)}}.$$

2. *Pour le Laplacien combinatoire, i.e. $m = 1$. Supposons que $\eta(n)\left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{\eta(n)}}\right)$ soit croissante et que $\eta(n) \to +\infty$ quand $n \to \infty$. Alors*

$$\sigma_{\text{ess}}(\Delta_1) = \emptyset \text{ et } \sigma(\Delta_1) = \{\lambda_i(\Delta_1), i \geq 1\},$$

avec $\lambda_i(\Delta_1)$ une suite infinie de valeur propre croissante tendant vers $+\infty$ telle que pour tout n assez grand,

$$\eta(n)\left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{\eta(n)}}\right) \leq \lambda_{(\#B_{n-1}+1)}(\Delta_1) \leq \lambda_{\#S_n}(\Delta_\eta) \leq \eta(n).$$

5.4 Un théorème de type Allegretto-Piepenbrink pour le bas du spectre essentiel

La question de la réciproque du théorème 5.2, à savoir l'existence de fonctions super-harmoniques positives sous le spectre est une question importante. Rappelons le résultat bien connu suivant, de type Allegretto-Piepenbrik, qui permet alors de caractériser le bas du spectre de $\Delta_{\mathscr{G}}$ à l'aide des fonctions super-harmoniques positives.

Théorème 5.8. *[HK11]*

Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ un graphe pondéré. Posons $\lambda^0 := \inf \sigma(\Delta_m)$ et considérons $\lambda \leq \lambda^0$. Alors il existe une fonction W strictement positive sur $\mathscr{V}$ telle que :

$$\tilde{\Delta}_m W(x) \geq \lambda W(x).$$

Dans le travail [BG15], nous avons généralisé ce résultat pour le spectre essentiel et obtenu :

Théorème 5.9. *[BG15]*

Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ un graphe pondéré. Posons $\lambda^0_{ess} := \inf \sigma_{\text{ess}}(\Delta_m)$.

a) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 := N_1(\varepsilon) \geq 1$, $C := C(\varepsilon) > 0$ et une fonction W strictement positive sur $\mathscr{V}$ telle que :*

$$\tilde{\Delta}_m W(x) \geq \left(\lambda^0_{ess} - \varepsilon\right) W(x) - C\mathbf{1}_{B_{N_1}}(x).$$

b) *Si de plus :*

$$\inf\{m(x), x \in \mathscr{V}\} > 0, \tag{5.107}$$

ou si $\mathscr{G}$ est un graphe à symétrie radiale faible *tel que $m(\mathscr{G}) = +\infty$; alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_2 := N_2(\varepsilon) \geq 1$ et une fonction W strictement positive sur $\mathscr{V}$ telle que :*

$$\tilde{\Delta}_m W(x) \geq \left(\lambda^0_{ess} - \varepsilon\right) \mathbf{1}_{B^c_{N_2}}(x) W(x).$$

L'idée de la preuve est de considérer une boule suffisamment grande B_K de telle sorte que l'opérateur $\left(\Delta_m^{B_K^c} - (\lambda^0_{ess} - \varepsilon)\right)$ est inversible et d'utiliser la propriété d'amélioration de la positivité de son inverse. Il reste alors la question d'un recollement avec une fonction harmonique sur la boule.

Le théorème 5.8 nécessite en plus l'utilisation d'inégalités de Harnack pour les fonctions super-harmoniques positives (voir par exemple [HK11]).

5.5 Représentation probabiliste des fonctions super harmoniques

Le Laplacien a une interprétation claire en terme de probabilités. En effet, il correspond à l'opposé du générateur d'une chaîne de Markov à temps continu. Cette chaîne peut se décrire très rapidement. Lorsqu'elle est en un point $x \in \mathscr{V}$, elle attend un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\deg(x)$ puis elle saute en un point y voisin de x avec probabilité : $\frac{\mathscr{E}(x,y)}{\eta(x)}$. On note $(X^x_t)_{t\geq 0}$ la chaîne de Markov (minimale) issue de x.

Théorème 5.10. *[BG15]*

Soit λ une fonction positive sur $\mathscr{V}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) *Il existe une fonction $W > 0$ telle que : $\tilde{\Delta}_m W(x) = \lambda(x) W(x)$ pour tout $x \in \mathscr{V}$.*

(ii) *Il existe une fonction $W > 0$ telle que : $\tilde{\Delta}_m W(x) \geq \lambda(x) W(x)$ pour tout $x \in \mathscr{V}$.*

(iii) *Pour tout $N \geq 1$, il existe une fonction $W_N > 0$ telle que : $\tilde{\Delta}_m W_N(x) \geq \lambda(x) W_N(x)$ pour tout $x \in B_N$.*

(iv) *Pour tout $N \geq 1$ et $x \in \mathscr{V}$ la fonction*

$$U_N(x) := \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^{T_N} \lambda(X^x_s) ds\right)\right] \tag{5.108}$$

est finie avec $T_N := \inf\{t \geq 0, X^x_t \in B^c_N\}$ le temps d'atteinte de B^c_N pour $(X^x_t)_{t\geq 0}$.

Les 2 points à démontrer sont (iii) implique (iv) et (iv) implique (i). Le point (iii) implique (iv) se fait par du calcul stochastique et des arguments de sur-martingale. Par du calcul stochastique, on montre également que la fonction U_N dans (iv) est solution de l'équation : $\tilde{\Delta}_m U_N(x) = \lambda(x) W_N(x)$ sur B_N. Les inégalités de Harnack permettent alors de construire une solution sur tout $\mathscr{V}$ et de déduire (i).

5.6 Le cas des graphes à symétrie radiale faible

Le résultat suivant justifie l'intérêt de la définition des graphes à symétrie radiale faible. Etant donné un graphe pondéré $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ muni d'une décomposition 1-dimensionnelle $(S_n)_{n\geq 0}$ et avec $(X_t)_{t\geq 0}$ de chaîne de Markov (minimale) à temps continu, on a

Proposition 5.11. *[BG15]*
Le graphe $\mathscr{G}$ est à symétrie radiale faible *par rapport à $(S_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si la partie radiale $(|X_t|)_{t\geq 0}$ est aussi une chaîne de Markov à temps continu sur $\mathbb{N}$.*

De plus dans ce cas, le générateur de $(|X_t|)_{t\geq 0}$ s'écrit pour $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$:

$$L^{\mathbb{N}} f(n) = \deg_+(n)(f(n+1) - f(n)) + \deg_-(n)(f(n-1) - f(n)). \quad (5.109)$$

Ce générateur correspond exactement à moins le Laplacien pondéré d'un graphe sur $\mathbb{N}$: $\mathscr{G}_{\mathbb{N}} := (\mathbb{N}, \mathscr{E}_{\mathbb{N}}, m_{\mathbb{N}})$.

Un fait remarquable est que le bas du spectre de $\Delta_{\mathscr{G}}$ est en fait entièrement déterminé par celui de sa partie radiale :

Théorème 5.12. *[BG15]*
Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ un graphe à symétrie radiale faible *tel que : $m(\mathscr{V}) = +\infty$. Alors, on a :*

$$\inf \sigma(\Delta_{\mathscr{G}}) = \inf \sigma(\Delta_{\mathscr{G}_{\mathbb{N}}}) \ \text{ et } \ \inf \sigma_{\text{ess}}(\Delta_{\mathscr{G}}) = \inf \sigma_{\text{ess}}(\Delta_{\mathscr{G}_{\mathbb{N}}}).$$

5.7 Comparaisons entre différents Laplaciens par un argument de couplage

Dans [KLW13], les auteurs ont proposé un critère de comparaison entre des Laplaciens discrets : Etant donnés deux graphes pondérés $\mathscr{G} := (\mathscr{V}^{\mathscr{G}}, \mathscr{E}^{\mathscr{G}}, m^{\mathscr{G}})$ et $\mathscr{H} := (\mathscr{V}^{\mathscr{H}}, \mathscr{E}^{\mathscr{H}}, m^{\mathscr{H}})$, on dit que $\mathscr{G}$ a *une croissance plus grande de sa courbure* que $\mathscr{H}$ si pour tout $x \in \mathscr{V}^{\mathscr{G}}, y \in \mathscr{V}^{\mathscr{H}}$ tels que $|x|^{\mathscr{G}} = |y|^{\mathscr{H}}$,

$$\deg_+^{\mathscr{G}}(x) \geq \deg_+^{\mathscr{H}}(y) \text{ and } \deg_-^{\mathscr{G}}(x) \leq \deg_-^{\mathscr{H}}(y). \quad (5.110)$$

Ce critère leur permet alors de comparer les bas des spectres des deux Laplaciens.

Dans [BG15], nous avons proposé un critère plus faible de comparaison :

Définition 5.13. *On dit que* $\mathscr{G}$ *a* une croissance de sa courbure -faible plus forte *que* $\mathscr{H}$ *si pour tout* $x \in \mathscr{V}^{\mathscr{G}}, y \in \mathscr{V}^{\mathscr{H}}$ *tels que* $|x|^{\mathscr{G}} = |y|^{\mathscr{H}}$*,*

$$\deg_+^{\mathscr{G}}(x) \geq \deg_+^{\mathscr{H}}(y) \ \ et \ \frac{\deg_+^{\mathscr{G}}(x)}{\deg_-^{\mathscr{G}}(x)} \geq \frac{\deg_+^{\mathscr{H}}(y)}{\deg_-^{\mathscr{H}}(y)}. \tag{5.111}$$

La condition (5.111) permet de construire un couplage pour lequel, de manière informelle, la partie radiale du processus de Markov sur $\mathscr{G}$ reste plus grande que celle pour $\mathscr{H}$ et part donc plus vite à l'infini (voir Proposition 10.1 dans [BG15]).

Grâce à la représentation probabiliste du théorème 5.10, on obtient la comparaison suivante des bas des spectres des Laplaciens.

Théorème 5.14. *[BG15]*

Soit $\mathscr{G}$ *et* $\mathscr{H}$ *deux graphes pondérés tels que* $\mathscr{G}$ *a* une croissance de sa courbure -faible plus forte *que* $\mathscr{H}$ *alors*

$$\inf \sigma(\Delta_{\mathscr{G}}) \geq \inf \sigma(\Delta_{\mathscr{H}}).$$

Si de plus $\inf\{m^{\mathscr{H}}(x), x \in \mathscr{V}^{\mathscr{H}}\} > 0$ *ou si* $\mathscr{H}$ *est à symétrie radiale faible et si* $m^{\mathscr{H}}(\mathscr{V}^{\mathscr{H}}) = +\infty$*, alors :*

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(\Delta_{\mathscr{G}}) \geq \inf \sigma_{\text{ess}}(\Delta_{\mathscr{H}}).$$

Cette notion permet également de comparer la complétude stochastique des deux graphes ([BG15, Théorème 11.2]). Notons également qu'un graphe à symétrie radiale faible est stochastiquement complet si et seulement si sa partie radiale l'est ([BG15, Théorème 11.1]).

5.8 Graphes creux

Comme rappelé précédemment et très étudiées dans la littérature, les estimées les plus connues du bas du spectre proviennent des inégalités isopérimétriques aussi appelées inégalités de Cheeger. Ces inégalités [Dod84, DK86, Fuj96, KL10] permettent en fait d'estimer le Laplacien au sens des formes par le degré. De manière plus précise, dans le cas d'un graphe simple, si a désigne la constante isopérimétrique, c'est-à-dire la plus grande constante a telle que pour tout sous ensemble $\mathscr{W}$ de $\mathscr{V}$:

$$\#E(\mathscr{W}) \leq \frac{a}{2}\#\partial\mathscr{W}$$

avec $E(\mathscr{W})$ les arêtes (dirigées) à l'intérieur de $\mathscr{W}$ and $\partial\mathscr{W}$ les arêtes du bord de $\mathscr{W}$, c'est-à-dire reliant $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}^c$; alors

$$(1 - \tilde{a})\langle \deg \varphi, \varphi\rangle \leq Q(\varphi) \leq (1 + \tilde{a})\langle \deg \varphi, \varphi\rangle,$$

où $\tilde{a} = \sqrt{1 - (\frac{1-a}{a})^2}$ et $(1-a)/a$ est la constante de Cheeger.

Par le principe du min-max, cela permet d'obtenir directement des estimées pour les valeurs propres. Le but du travail [BGK15] est de proposer une caractérisation d'une inégalité fonctionnelle un peu plus générale :

$$(1-\tilde{a})\langle \deg \varphi, \varphi\rangle - \tilde{k}\langle \varphi, \varphi\rangle \leq Q(\varphi) \leq (1+\tilde{a})\langle \deg \varphi, \varphi\rangle + \tilde{k}\langle \varphi, \varphi\rangle; \qquad \text{(E)}$$

ce genre d'inégalités apparaissant dans [Gol14] ainsi que dans la preuve du théorème 5.6 pour les asymptotiques des valeurs propres.

L'idée à la base de (E) sera de compléter la notion d'isopérimétrie avec la notion de graphes creux ("sparse graphs"en anglais). Ce travail est donc proche dans l'esprit de celui de Mohar [Moh13] dans le cas d'un graphe fini.

Un graphe est dit *k-creux* si pour tout sous-ensemble fini $\mathscr{W}$:

$$\#E(\mathscr{W}) \leq k\#\mathscr{W}. \tag{5.112}$$

Dans [BGK15], on introduit alors pour $a, k \geq 0$, la notion de graphes (a,k)-creux : un graphe est dit (a,k)-creux si pour tout sous-ensemble fini $\mathscr{W}$:

$$\#E(\mathscr{W}) \leq k\#\mathscr{W} + \frac{a}{2}\#\partial\mathscr{W}. \tag{5.113}$$

De manière plus générale, dans le cas d'un opérateur de Schrödinger $\Delta + v$ avec un potentiel $v \geq 0$, on peut ajouter v dans la définition et demander que, pour tout sous-ensemble fini $\mathscr{W}$:

$$\#E(\mathscr{W}) \leq k\#\mathscr{W} + \frac{a}{2}(\#\partial\mathscr{W} + v(\mathscr{W})), \tag{5.114}$$

where $v(\mathscr{W}) = \sum_{x\in\mathscr{W}} v(x)$.

Pour obtenir une asymptotique précise des valeurs propres similaire au théorème 5.6, le concept de graphes *presque-creux* sera important. Un graphe est dit *presque-creux* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $k_\varepsilon \geq 0$ pour laquelle il est $(\varepsilon, k_\varepsilon)$*-creux*, i. e. pour tout sous-ensemble fini $\mathscr{W}$:

$$\#E(\mathscr{W}) \leq k_\varepsilon\#\mathscr{W} + \frac{\varepsilon}{2}(\#\partial\mathscr{W} + v(\mathscr{W})), \tag{5.115}$$

On a bien sûr les implications : un graphe *k-creux* est *presque creux*, un graphe *presque creux* est (a', k')*-creux* pour certains $a', k' > 0$.

Le résultat principal de [BGK15] est le suivant (écrit dans le cas du Laplacien combinatoire sur un graphe simple, $m = 1$).

Théorème 5.15. *[BGK15]*

Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ un graphe et q un potentiel positif. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $a, k \geq 0$ tels que le graphe $(\mathscr{G}, q)$ est (a,k)-creux.

(ii) Il existe $\tilde{a} \in (0,1)$ et $\tilde{k} \geq 0$ tels que sur $\mathcal{C}_c(\mathscr{V})$

$$(1-\tilde{a})(\deg + q) - \tilde{k} \leq \Delta + q \leq (1+\tilde{a})(\deg + q) + \tilde{k}.$$

(iii) Il existe $\tilde{a} \in (0,1)$ et $\tilde{k} \geq 0$ tels que sur $\mathcal{C}_c(\mathscr{V})$

$$(1-\tilde{a})(\deg + q) - \tilde{k} \leq \Delta + q.$$

(iv) $\mathcal{D}(|\Delta + q|^{1/2}) = \mathcal{D}(|\deg + q|^{1/2})$.

De plus, $\Delta + q$ a un spectre purement discret si et seulement si

$$\liminf_{|x|\to\infty} (\deg + q)(x) = \infty.$$

Dans ce cas, on a également :

$$1 - \tilde{a} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\Delta + q)}{\lambda_n(\deg + q)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\Delta + q)}{\lambda_n(\deg + q)} \leq 1 + \tilde{a}.$$

Présentons maintenant une idée de la preuve du théorème 5.15. Pour montrer que (i) implique (ii), un ingrédient important est donné par les formules de l'aire et de la co-aire. Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathscr{V}, \mathbb{R})$ ou indifféremment $f \in \mathcal{C}_c(\mathscr{V}, \mathbb{C})$ et $t > 0$, on pose $\Omega_t := \{x \in \mathscr{V} \mid |f(x)|^2 > t\}$. On a

$$\int_0^\infty m(\Omega_t(f))dt = \sum_{x\in\mathscr{V}} f(x)m(x),$$
$$\int_0^\infty \mathscr{E}(\partial\Omega_t(f))dt = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\mathscr{V}} b(x,y)|f(x) - f(y)|,$$

Ainsi, l'hypothèse (a,k)-creux et que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, permettent alors d'écrire (ici dans le cas $q = 0$ pour simplifier) :

$$\begin{aligned}
\langle f, \deg f\rangle - k\|f\|^2 &= \int_0^\infty \Big(\deg(\Omega_t) - k|\Omega_t|\Big)dt \\
&= \int_0^\infty \Big(2|\mathscr{E}_{\Omega_t}| + |\partial\Omega_t| - k|\Omega_t|\Big)dt \\
&\leq (1+a)\int_0^\infty \Big(|\partial\Omega_t|\Big)dt \\
&= \frac{(1+a)}{2} \sum_{x,y,x\sim y} \big||f(x)|^2 - |f(y)|^2\big| \\
&\leq \frac{(1+a)}{2} \left(\sum_{x,y,x\sim y} |f(x) - f(y)|^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{x,y,x\sim y} |f(x) + f(y)|^2\right)^{1/2} \\
&= (1+a)\langle f, \Delta f\rangle^{\frac{1}{2}} \big(\langle f, (2\deg - \Delta)f\rangle\big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

Le point (ii) s'obtient alors en prenant les carrés et en utilisant qu'un trinôme est négatif.

L'implication (ii) implique (iii) est immédiate, tandis que (iii) implique (i) s'obtient en appliquant (iii) aux indicatrices d'ensemble.

L'équivalence entre (ii) et (iv) est une conséquence du théorème du graphe fermé.

Un point surprenant est celui de la borne inférieure dans (iii) qui produit automatiquement une borne supérieure similaire.

Ceci est en fait un fait général (voir Lemme 2.9 dans [BGK15]) qui découle du calcul élémentaire :

$$\begin{aligned}\langle f, (2\deg - \Delta) f\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathscr{V}, x\sim y} (2|f(x)|^2 + 2|f(y)|^2) - |f(x)-f(y)|^2) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x,y,x\sim y} |f(x)+f(y)|^2 \geq \frac{1}{2}\sum_{x,y,x\sim y} ||f(x)| - |f(y)||^2 \\ &= \langle |f|, \Delta |f|\rangle. \end{aligned} \tag{5.116}$$

Notons également que l'opérateur $(2\deg - \Delta)$ peut s'écrire comme un opérateur magnétique Δ_π avec une phase constante égale à π. Notons de plus que dans le cas où le graphe est bi-parti, l'opérateur $(2\deg - \Delta)$ est en fait unitairement équivalent au Laplacien initial Δ.

Dans [BGK15], on considère le cas de potentiels non nécessairement positifs. Pour cela, on introduit les classes de Kato :pour $0 < \alpha < 1$ on dit que le potentiel $q \in \mathscr{K}_\alpha$ s'il existe $C_\alpha \geq 0$ tel que

$$q_- \leq \alpha(\Delta + q_+) + C_\alpha,$$

Le théorème 5.15 reste alors valable pour des valeurs différentes des constantes. Pour le cas *presque-creux*, on considérera aussi la classe $\mathscr{K}_{0+} := \bigcap_{\alpha\in(0,1)} \mathscr{K}_\alpha$.

De plus dans [BGK15], des exemples de graphes (a,k)-creux et presque creux sont donnés. Notons que les graphes planaires sont 6-creux. Les liens avec l'isopérimétrie et l'isopérimétrie à l'infini sont aussi établis.

5.9 Le cas d'un Laplacien magnétique

Commençons par rappeler la définition d'un un tel Laplacien magnétique. Etant donné $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ un graphe pondéré et $\theta : \mathscr{V}\times\mathscr{V} \to \mathbb{R}$ une phase, i.e. une fonction antisymétrique sur les arêtes, on considère pour $f : \mathscr{V} \to \mathbb{C}$, à support fini.

$$\Delta_\theta f(x) := \frac{1}{m(x)}\sum_{y\in X} b(x,y)(f(x) - e^{i\theta(x,y)} f(y)).$$

La forme associée est donnée par

$$Q_\theta(f) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in X} b(x,y)|f(x) - e^{i\theta(x,y)} f(y)|^2.$$

Ces Laplaciens magnétiques ont été introduits en physique et on réfère par exemple à [DM06] pour une petite introduction. La question d'être essentiellement auto-adjoint a été étudiée par exemple dans[CdVTHT11b, Mil11, Gol14]. Des formules de Feynman-Kac-Itô ont été établies formulas [GKS16, GMT14] ainsi que des considérations spectrales [DM06, GT17, LLPP15, LMP19].

Mais ici, on pourra comme précédemment considérer l'extension de Friedrichs. La plupart des résultats provient de résultat obtenus pour les fonctions à support finis. On pourra également rajouter un potentiel q et supposer que celui-ci appartient à une classe de Kato.

La première raison pour introduire des Laplaciens magnétiques est l'observation que l'opérateur $2\deg - \Delta$ déjà rencontré correspond exactement à Δ_π. Ceci est en fait vrai pour tous les Laplaciens magnétiques et on a

$$2\deg - \Delta_\theta = \Delta_{\theta+\pi}.$$

Un point clé concernant l'étude des Laplaciens est l'inégalité de Kato : pour tout graphe $\mathscr{G}$, toute phase θ, pour tout $f : \mathscr{V} \to \mathbb{C}$, on a

$$\langle |f|, \Delta |f| \rangle \leq \langle f, \Delta_\theta f \rangle. \tag{5.117}$$

On déduit alors directement de ces remarques que si un graphe est (a,k)-*creux*, alors les estimées du théorème 5.15 sont encore satisfaites pour les Laplaciens magnétiques.

Théorème 5.16. *[BGK15].*

Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m)$ un graphe, θ une phase et $q \in \mathscr{K}_{0+}^\theta$ un potentiel. Supposons que $(\mathscr{G}, q)$ est (a,k)-creux, $a, k \geq 0$. Alors

(a) Il existe $\tilde{a} \in (0,1)$, $k \geq 0$ telle que sur $\mathcal{C}_c(\mathscr{V})$

$$(1-\tilde{a})(\deg + q) - k \leq \Delta_\theta + q \leq (1+\tilde{a})(\deg + q) + k.$$

(b) $\mathcal{D}\left(|\Delta_\theta + q|^{1/2}\right) = \mathcal{D}\left(|\deg + q|^{1/2}\right)$.

(c) L'opérateur $\Delta_\theta + q$ a un spectre purement discret si et seulement si

$$\liminf_{|x|\to\infty} (\deg + q)(x) = \infty.$$

Dans ce cas, si $(\mathscr{G}, q)$ est en fait presque-creux*, alors.*

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda_n(\Delta_\theta + q)}{\lambda_n(\deg + q)} = 1.$$

La borne supérieure dans (a) découle de la borne inférieure pour $\Delta_{\theta+\pi}$.

Le but du travail [BGK$^+$17] est donc de proposer une notion similaire aux graphes (a,k)-creux mais tenant compte du caractère magnétique. Un but sera aussi de proposer des exemples de Laplaciens magnétiques satisfaisant une borne inférieure mais pas la borne supérieure correspondante. Ces exemples auront en fait un comportement très différent suivant la présence de la phase magnétique θ ou non.

Pour cela, on introduit un indice de p-frustration magnétique, $p \geq 1$: pour tout $\mathscr{W}$ sous ensemble fini de $\mathscr{V}$,

$$\iota_\theta^{(p)}(\mathscr{W}) := \min_{\tau:\mathscr{W}\to\mathbb{T}} \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\mathscr{W}} \mathscr{E}(x,y)|\tau(x) - e^{i\theta(x,y)}\tau(y)|^p,$$

avec $\mathbb{T}$:=$\{z \in \mathcal{C} \mid |z| = 1\}$. Comme pour la forme Q, la valeur de ι_p est indépendante de m.

Cet indice de frustration caractérise l'action physique du champ magnétique : le Laplacien magnétique Δ_θ est unitairement équivalent au Laplacien classique Δ sur $\mathscr{W}$ si et seulement si $\iota_\theta^{(p)}(\mathscr{W}) = 0$ (voir [BGK$^+$17, Proposition 2.1]).

Cet indice de frustration magnétique est apparu avec $p = 1$ dans [LLPP15] et avec $p = 2$ dans [BSS13].

Définition 5.17. *[BGK$^+$17] Soit $a, k \geq 0$ et $p \in [1,\infty)$. On dit que le graphe magnétique $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m, \theta, q)$ est $(a,k)_p$*-magnétique-creux *si pour tout sous ensemble fini $\mathscr{W}$:*

$$\mathscr{E}(\mathscr{W}\times\mathscr{W}) \leq (1+a)\iota_\theta^{(p)}(\mathscr{W}) + a\big(\frac{1}{2}\mathscr{E}(\partial\mathscr{W}) + (q_+m)(\mathscr{W})\big) + km(\mathscr{W}).$$

On dit que le graphe $\mathscr{G}$ est $(a,k)_p$-bi-magnétique-creux *s'il est $(a,k)_p$*-magnétique-creux *pour les deux phases θ et $\theta + \pi$.*

Le choix du facteur $(1 + a)$ devant l'indice de frustration magnétique est naturel au vu du théorème 5.18. Remarquons que pour les graphes bi-partis, on a

$$\iota_\theta^{(p)}(\mathscr{W}) = \iota_{\theta+\pi}^{(p)}(\mathscr{W}).$$

Ainsi un graphe bi-parti magnétique-creux est automatiquement bi-magnétique creux.

On introduit alors les formes $Q_\theta^{(p)} := Q_{\mathscr{E},m,\theta,q}^{(p)}$ pour $p \geq 1$ via pour $f : \mathscr{V} \to \mathbb{C}$ à support fini :

$$Q_\theta^{(p)}(f) := \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\mathscr{V}} b(x,y)|f(x) - e^{i\theta(x,y)}f(y)|^p + \sum_{x\in\mathscr{V}} v(x)|f(x)|^p m(x),$$

Le théorème principal de [BGK$^+$17] est alors :

Théorème 5.18. *[BGK$^+$17]*

Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m, \theta, q)$ un graphe magnétique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $a, k \geq 0$ tels que le graphe magnétique $\mathscr{G}$ est $(a,k)_1$-magnétique-creux.

(i') Pour tout (pour un) $p \geq 1$, il existe $a', k' \geq 0$ tels que le graphe magnétique $\mathscr{G}$ est $(a,k)_p$-magnétique-creux.

(ii) Pour tout (pour un) $p \geq 1$, il existe $\tilde{a} \in (0,1)$ et $\tilde{k} \geq 0$ tels que pour tout $f : \mathscr{V} \to \mathbb{C}$ à support fini

$$(1-\tilde{a})\langle \deg + q^{(+)}, |f|^p\rangle - \tilde{k}\|f\|_p^p \leq Q^{(p)}_{\mathscr{E},m,\theta,q^+}(f).$$

De plus pour $p_0 \geq 1$ fixé, $\alpha \in (0,1)$ et $q_- \in \mathcal{K}_\alpha^{p_0,\theta}$, les points précédents sont aussi équivalents à

(iii) Il existe $\tilde{a} \in (0,1)$ et $\tilde{k} \geq 0$ tels que pour tout $f : \mathscr{V} \to \mathbb{C}$ à support fini

$$(1-\tilde{a})\langle \deg + q|f|^{p_0}\rangle - \tilde{k}\|f\|_{p_0}^{p_0} \leq Q^{(p_0)}_{\mathscr{E},m,\theta,q}(f).$$

De plus, dans le cas $p_0 = 2$, si $q_- \in \mathcal{K}_\alpha^{2,\theta}$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$, les assertion suivantes sont aussi équivalentes à :

(iv) $D(Q_{b,\theta,v,m}) = \ell^2(\mathscr{V}, \deg + q^{(+)}) \cap \ell^2(\mathscr{V}, m)$.

Remarquons que
$$\iota_\theta^{(p)}(\mathscr{W}) \leq 2^{p-1}\iota_\theta^{(1)}(\mathscr{W}).$$
Ainsi, un graphe $(a,k)_p$-magnétique-creux est donc nécessairement $(2^{p-1}a,k)_1$-magnétique-creux. Une conséquence remarquable du théorème précédent est que la réciproque est vraie et que ces notions sont donc équivalentes pour tout $p \geq 1$ (à des constantes près).

A la différence du théorème 5.15 dans le cas non magnétique, un facteur $\sqrt{p^2+1}$ supplémentaire apparaît dans les majorations du [BGK+17, Lemme 3.11]. Ainsi, la constante $\tilde{a}$ obtenue dans (ii) ne tend pas vers 0 lorsque la constante a dans (i) tend vers 0. La notion de graphes magnétiques presque magnétique-creux n'est donc pas particulièrement pertinente.

Par conséquent, on obtient juste l'estimée suivante des valeurs propres.

Corollaire 5.19. *[BGK+17]*

Soit $\mathscr{G} := (\mathscr{V}, \mathscr{E}, m, \theta, q)$ un graphe magnétique avec $q_- \in \mathcal{K}_\alpha^\theta$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$. Notons $H_\theta := \Delta_\theta + q$. Supposons que $\mathscr{G}$ est $(a,k)_1$-magnétique-creux. Alors le spectre de H_θ est discret si et seulement si $\liminf |x| \to +\infty \deg(x) + q(x) = +\infty$.

De plus, dans ce cas, on a

$$\frac{2(1-\alpha)}{5(1+a)^2 - \alpha} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(H_\theta)}{\lambda_n(\deg + q)}.$$

Une estimée supérieure est possible dans le cas bi-magnétique creux.

Des exemples sont proposés dans [BGK+17]. Le cas des graphes produit est étudié le théorème 4.2. Dans le cas où la mesure m du produit tend vers 0 à l'infini, on obtient alors une construction similaire à celle de [GT17] de graphes pour lesquels le Laplacien magnétique a un spectre purement discret alors que ce ne n'est pas le cas pour le Laplacien classique.

Les cycles magnétiques sont également étudiés en détail et par un principe de superposition (Proposition 4.10), le cas de certains graphes planaires est envisagé (Proposition 4.11). Ainsi on propose l'exemple de triangulations avec la phase $\theta = \pi$ qui sont des graphes magnétiques-creux mais pas bi-magnétiques creux.

5.10 Perspectives

Dans le cas d'un Laplacien sur un graphe à symétrie radiale faible, on a vu que le bas du spectre, le bas du spectre essentiel ainsi que sa complétude stochastique sont donnés exactement par la partie radiale du Laplacien. Une question naturelle est de voir qu'elles sont les autres propriétés du Laplacien qui ne dépendent que de la partie radiale. A ma connaissance, la question est ouverte pour la propriété d'être essentiellement auto-adjoint.

On peut également sur un tel graphe, dans le cas où le degré est fini étudier le comportement du haut du spectre lorsqu'on ajoute par exemple des arêtes seulement entre des points d'une même sphère.

Concernant les problèmes de type isopérimétrique, il doit être possible d'affaiblir la notion de graphes creux et d'en déduire une relation avec une inégalité au sens des formes pour une puissance du degré. De plus, des travaux récents relient les valeurs propres d'ordre supérieure à des constantes de Cheeger d'ordre supérieur. Est-il possible de relier ces résultats à des inégalités similaires pour le Laplacien ?

Références

[ABC$^+$00] Cécile Ané, Sébastien Blachère, Djalil Chafaï, Pierre Fougères, Ivan Gentil, Florent Malrieu, Cyril Roberto, and Grégory Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2000. With a preface by Dominique Bakry and Michel Ledoux.

[ABJ18] Marc Arnaudon, Michel Bonnefont, and Aldéric Joulin. Intertwinings and generalized Brascamp-Lieb inequalities. *Rev. Mat. Iberoam.*, 34(3) :1021–1054, 2018.

[ACDH04] Pascal Auscher, Thierry Coulhon, Xuan Thinh Duong, and Steve Hofmann. Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(6) :911–957, 2004.

[Aid98] Shigeki Aida. Uniform positivity improving property, Sobolev inequalities, and spectral gaps. *J. Funct. Anal.*, 158(1) :152–185, 1998.

[AL14] Andrei Agrachev and Paul W. Y. Lee. Generalized Ricci curvature bounds for three dimensional contact subriemannian manifolds. *Math. Ann.*, 360(1-2) :209–253, 2014.

[AL15] Andrei Agrachev and Paul W. Y. Lee. Bishop and Laplacian comparison theorems on three-dimensional contact sub-Riemannian manifolds with symmetry. *J. Geom. Anal.*, 25(1) :512–535, 2015.

[AZ02a] A. Agrachev and I. Zelenko. Geometry of Jacobi curves. II. *J. Dynam. Control Systems*, 8(2) :167–215, 2002.

[AZ02b] A. A. Agrachev and I. Zelenko. Geometry of Jacobi curves. I. *J. Dynam. Control Systems*, 8(1) :93–140, 2002.

[Bak86] Dominique Bakry. Un critère de non-explosion pour certaines diffusions sur une variété riemannienne complète. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 303(1) :23–26, 1986.

[Bak94] Dominique Bakry. L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes. In *Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992)*, volume 1581 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–114. Springer, Berlin, 1994.

[Bau16] Fabrice Baudoin. Sub-Laplacians and hypoelliptic operators on totally geodesic Riemannian foliations. In *Geometry, analysis and dynamics on sub-Riemannian manifolds. Vol. 1*, EMS Ser. Lect. Math., pages 259–321. Eur. Math. Soc., Zürich, 2016.

[Bau17a] Fabrice Baudoin. Bakry-Émery meet Villani. *J. Funct. Anal.*, 273(7) :2275–2291, 2017.

[Bau17b] Fabrice Baudoin. Stochastic analysis on sub-Riemannian manifolds with transverse symmetries. *Ann. Probab.*, 45(1) :56–81, 2017.

[BB12] Fabrice Baudoin and Michel Bonnefont. Log-Sobolev inequalities for subelliptic operators satisfying a generalized curvature dimension inequality. *J. Funct. Anal.*, 262(6) :2646–2676, 2012.

[BB13] Fabrice Baudoin and Michel Bonnefont. Sub-Riemannian balls in CR Sasakian manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(11) :3919–3924, 2013.

[BB15] Fabrice Baudoin and Michel Bonnefont. Curvature-dimension estimates for the Laplace-Beltrami operator of a totally geodesic foliation. *Nonlinear Anal.*, 126 :159–169, 2015.

[BB16] Fabrice Baudoin and Michel Bonnefont. Reverse Poincaré inequalities, isoperimetry, and Riesz transforms in Carnot groups. *Nonlinear Anal.*, 131 :48–59, 2016.

[BBBC08] Dominique Bakry, Fabrice Baudoin, Michel Bonnefont, and Djalil Chafaï. On gradient bounds for the heat kernel on the Heisenberg group. *J. Funct. Anal.*, 255(8) :1905–1938, 2008.

[BBBQ09] Dominique Bakry, Fabrice Baudoin, Michel Bonnefont, and Bin Qian. Subelliptic Li-Yau estimates on three dimensional model spaces. In *Potential theory and stochastics in Albac*, volume 11 of *Theta Ser. Adv. Math.*, pages 1–10. Theta, Bucharest, 2009.

[BBC19] Fabrice Baudoin, Michel Bonnefont, and Li Chen. Convergence to equilibrium for hypoelliptic non-symmetric Ornstein-Uhlenbeck type operators. *arXiv e-prints*, page arXiv :1906.10828, Jun 2019.

[BBG14] Fabrice Baudoin, Michel Bonnefont, and Nicola Garofalo. A sub-Riemannian curvature-dimension inequality, volume doubling property and the Poincaré inequality. *Math. Ann.*, 358(3-4) :833–860, 2014.

[BBGM14] Fabrice Baudoin, Michel Bonnefont, Nicola Garofalo, and Isidro H. Munive. Volume and distance comparison theorems for sub-Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal.*, 267(7) :2005–2027, 2014.

[BCG08] Dominique Bakry, Patrick Cattiaux, and Arnaud Guillin. Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes : Lyapunov versus Poincaré. *J. Funct. Anal.*, 254(3) :727–759, 2008.

[BCH16] Michel Bonnefont, Djalil Chafaï, and Ronan Herry. On logarithmic Sobolev inequalities for the heat kernel on the Heisenberg group. *arXiv e-prints*, page arXiv :1607.02741, Jul 2016.

[BÉ85] Dominique Bakry and Michel Émery. Diffusions hypercontractives. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 177–206. Springer, Berlin, 1985.

[BG11] Fabrice Baudoin and Nicola Garofalo. Perelman's entropy and doubling property on Riemannian manifolds. *J. Geom. Anal.*, 21(4) :1119–1131, 2011.

[BG15] Michel Bonnefont and Sylvain Golénia. Essential spectrum and Weyl asymptotics for discrete Laplacians. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 24(3) :563–624, 2015.

[BG17a] Fabrice Baudoin and Nicola Garofalo. Curvature-dimension inequalities and Ricci lower bounds for sub-Riemannian manifolds with transverse symmetries. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 19(1) :151–219, 2017.

[BG17b] Fabrice Baudoin and Erlend Grong. Transverse Weitzenb\"ock formulas and de Rham cohomology of totally geodesic foliations. *arXiv e-prints*, page arXiv :1711.08382, Nov 2017.

[BGG00] Richard Beals, Bernard Gaveau, and Peter C. Greiner. Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 79(7) :633–689, 2000.

[BGG18] François Bolley, Ivan Gentil, and Arnaud Guillin. Dimensional improvements of the logarithmic Sobolev, Talagrand and Brascamp-Lieb inequalities. *Ann. Probab.*, 46(1) :261–301, 2018.

[BGH01] Sergey G. Bobkov, Friedrich Götze, and Christian Houdré. On Gaussian and Bernoulli covariance representations. *Bernoulli*, 7(3) :439–451, 2001.

[BGK15] Michel Bonnefont, Sylvain Golénia, and Matthias Keller. Eigenvalue asymptotics for Schrödinger operators on sparse graphs. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(5) :1969–1998, 2015.

[BGK+17] Michel Bonnefont, Sylvain Golénia, Matthias Keller, Shiping Liu, and Florentin Münch. Magnetic sparseness and Schr\"odinger operators on graphs. *arXiv e-prints*, page arXiv :1711.10418, Nov 2017.

[BGKT17] Fabrice Baudoin, Erlend Grong, Kazumasa Kuwada, and Anton Thalmaier. Sub-Laplacian comparison theorems on totally geodesic Riemannian foliations. *arXiv e-prints*, page arXiv :1706.08489, Jun 2017.

[BGL01] Sergey G. Bobkov, Ivan Gentil, and Michel Ledoux. Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 80(7) :669–696, 2001.

[BGL14] Dominique Bakry, Ivan Gentil, and Michel Ledoux. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*, volume 348 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Cham, 2014.

[BGM18] Sayan Banerjee, Maria Gordina, and Phanuel Mariano. Coupling in the Heisenberg group and its applications to gradient estimates. *Ann. Probab.*, 46(6) :3275–3312, 2018.

[BHJ14] Frank Bauer, Bobo Hua, and Jürgen Jost. The dual Cheeger constant and spectra of infinite graphs. *Adv. Math.*, 251 :147–194, 2014.

[BHT08] Fabrice Baudoin, Martin Hairer, and Josef Teichmann. Ornstein-Uhlenbeck processes on Lie groups. *J. Funct. Anal.*, 255(4) :877–890, 2008.

[BJ14] Michel Bonnefont and Aldéric Joulin. Intertwining relations for one-dimensional diffusions and application to functional inequalities. *Potential Anal.*, 41(4) :1005–1031, 2014.

[BJ17] Michel Bonnefont and Aldéric Joulin. Intertwinings, second-order Brascamp-Lieb inequalities and spectral estimates. *arXiv e-prints*, page arXiv :1710.08106, Oct 2017.

[BJ18] Michel Bonnefont and Nicolas Juillet. Couplings in L^p distance of two Brownian motions and their L{\'e}vy area. *arXiv e-prints*, page arXiv :1801.04109, Jan 2018.

[BJ19] Michel Bonnefont and Aldéric Joulin. A note on eigenvalues estimates for one-dimensional diffusion operators. *arXiv e-prints*, page arXiv :1906.02496, Jun 2019.

[BJM16a] Michel Bonnefont, Aldéric Joulin, and Yutao Ma. A note on spectral gap and weighted Poincaré inequalities for some one-dimensional diffusions. *ESAIM Probab. Stat.*, 20 :18–29, 2016.

[BJM16b] Michel Bonnefont, Aldéric Joulin, and Yutao Ma. Spectral gap for spherically symmetric log-concave probability measures, and beyond. *J. Funct. Anal.*, 270(7) :2456–2482, 2016.

[BK14] Fabrice Baudoin and Bumsik Kim. Sobolev, Poincaré, and isoperimetric inequalities for subelliptic diffusion operators satisfying a generalized curvature dimension inequality. *Rev. Mat. Iberoam.*, 30(1) :109–131, 2014.

[BKS18] Zoltán M. Balogh, Alexandru Kristály, and Kinga Sipos. Geometric inequalities on Heisenberg groups. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 57(2) :Art. 61, 41, 2018.

[BKW15] Frank Bauer, Matthias Keller, and Radoslaw K. Wojciechowski. Cheeger inequalities for unbounded graph Laplacians. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(2) :259–271, 2015.

[BKW16] Fabrice Baudoin, Bumsik Kim, and Jing Wang. Transverse Weitzenböck formulas and curvature dimension inequalities on Riemannian foliations with totally geodesic leaves. *Comm. Anal. Geom.*, 24(5) :913–937, 2016.

[BL76] Herm Jan Brascamp and Elliott H. Lieb. On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation. *J. Functional Analysis*, 22(4) :366–389, 1976.

[BL06] Dominique Bakry and Michel Ledoux. A logarithmic Sobolev form of the Li-Yau parabolic inequality. *Rev. Mat. Iberoam.*, 22(2) :683–702, 2006.

[BL09] Sergey G. Bobkov and Michel Ledoux. Weighted Poincaré-type inequalities for Cauchy and other convex measures. *Ann. Probab.*, 37(2) :403–427, 2009.

[BLU07] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, and F. Uguzzoni. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[Bob03] S. G. Bobkov. Spectral gap and concentration for some spherically symmetric probability measures. In *Geometric aspects of functional analysis*, volume 1807 of *Lecture Notes in Math.*, pages 37–43. Springer, Berlin, 2003.

[Bon12] Michel Bonnefont. The subelliptic heat kernels on $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and on its universal covering $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$: integral representations and some functional inequalities. *Potential Anal.*, 36(2) :275–300, 2012.

[BR19] Davide Barilari and Luca Rizzi. Sub-Riemannian interpolation inequalities. *Invent. Math.*, 215(3) :977–1038, 2019.

[BSS13] Afonso S. Bandeira, Amit Singer, and Daniel A. Spielman. A Cheeger inequality for the graph connection Laplacian. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 34(4) :1611–1630, 2013.

[CCEL13] Eric A. Carlen, Dario Cordero-Erausquin, and Elliott H. Lieb. Asymmetric covariance estimates of Brascamp-Lieb type and related inequalities for log-concave measures. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 49(1) :1–12, 2013.

[CdVTHT11a] Yves Colin de Verdière, Nabila Torki-Hamza, and Françoise Truc. Essential self-adjointness for combinatorial Schrödinger operators II—metrically non complete graphs. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 14(1) :21–38, 2011.

[CdVTHT11b] Yves Colin de Verdière, Nabila Torki-Hamza, and Françoise Truc. Essential self-adjointness for combinatorial Schrödinger operators III—Magnetic fields. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 20(3) :599–611, 2011.

[CE17] Dario Cordero-Erausquin. Transport inequalities for log-concave measures, quantitative forms, and applications. *Canad. J. Math.*, 69(3) :481–501, 2017.

[CEFM04] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi, and B. Maurey. The (B) conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems. *J. Funct. Anal.*, 214(2) :410–427, 2004.

[CGWW09] Patrick Cattiaux, Arnaud Guillin, Feng-Yu Wang, and Liming Wu. Lyapunov conditions for super Poincaré inequalities. *J. Funct. Anal.*, 256(6) :1821–1841, 2009.

[CGZ13] Patrick Cattiaux, Arnaud Guillin, and Pierre André Zitt. Poincaré inequalities and hitting times. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 49(1) :95–118, 2013.

[Che08] Mu Fa Chen. Spectral gap and logarithmic Sobolev constant for continuous spin systems. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 24(5) :705–736, 2008.

[CM97] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. Harmonic functions on manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 146(3) :725–747, 1997.

[Cra91] M. Cranston. Gradient estimates on manifolds using coupling. *J. Funct. Anal.*, 99(1) :110–124, 1991.

[Cra92] M. Cranston. A probabilistic approach to gradient estimates. *Canad. Math. Bull.*, 35(1) :46–55, 1992.

[CW97] Mu-Fa Chen and Feng-Yu Wang. Estimation of spectral gap for elliptic operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(3) :1239–1267, 1997.

[CY09] Sagun Chanillo and Paul C. Yang. Isoperimetric inequalities and volume comparison theorems on CR manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 2009.

[DK86] J. Dodziuk and W. S. Kendall. Combinatorial Laplacians and isoperimetric inequality. In *From local times to global geometry, control and physics (Coventry, 1984/85)*, volume 150 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 68–74. Longman Sci. Tech., Harlow, 1986.

[DM05] Bruce K. Driver and Tai Melcher. Hypoelliptic heat kernel inequalities on the Heisenberg group. *J. Funct. Anal.*, 221(2) :340–365, 2005.

[DM06] Józef Dodziuk and Varghese Mathai. Kato's inequality and asymptotic spectral properties for discrete magnetic Laplacians. In *The ubiquitous heat kernel*, volume 398 of *Contemp. Math.*, pages 69–81. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[Dod84] Jozef Dodziuk. Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284(2) :787–794, 1984.

[Dod06] Józef Dodziuk. Elliptic operators on infinite graphs. In *Analysis, geometry and topology of elliptic operators*, pages 353–368. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[Eld09] Nathaniel Eldredge. Precise estimates for the subelliptic heat kernel on H-type groups. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 92(1) :52–85, 2009.

[Eld10] Nathaniel Eldredge. Gradient estimates for the subelliptic heat kernel on H-type groups. *J. Funct. Anal.*, 258(2) :504–533, 2010.

[Elw14] David Elworthy. Decompositions of diffusion operators and related couplings. In *Stochastic analysis and applications 2014*, volume 100 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 283–306. Springer, Cham, 2014.

[FŌT94] Masatoshi Fukushima, Yōichi Ōshima, and Masayoshi Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, volume 19 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[Fuj96] Koji Fujiwara. The Laplacian on rapidly branching trees. *Duke Math. J.*, 83(1) :191–202, 1996.

[GKS16] Batu Güneysu, Matthias Keller, and Marcel Schmidt. A Feynman-Kac-Itô formula for magnetic Schrödinger operators on graphs. *Probab. Theory Related Fields*, 165(1-2) :365–399, 2016.

[GMT14] Batu Güneysu, Ognjen Milatovic, and Françoise Truc. Generalized Schrödinger semigroups on infinite graphs. *Potential Anal.*, 41(2) :517–541, 2014.

[GN96] Nicola Garofalo and Duy-Minh Nhieu. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49(10) :1081–1144, 1996.

[Gol14] Sylvain Golénia. Hardy inequality and asymptotic eigenvalue distribution for discrete Laplacians. *J. Funct. Anal.*, 266(5) :2662–2688, 2014.

[GR01] Ivan Gentil and Cyril Roberto. Spectral gaps for spin systems : some non-convex phase examples. *J. Funct. Anal.*, 180(1) :66–84, 2001.

[Gri09] Alexander Grigor'yan. *Heat kernel and analysis on manifolds*, volume 47 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI ; International Press, Boston, MA, 2009.

[Gro75] Leonard Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. *Am. J. Math.*, 97(4) :1061–1083, 1975.

[Gro92] Leonard Gross. Logarithmic Sobolev inequalities on Lie groups. *Ill. J. Math.*, 36(3) :447–490, 1992.

[GT16a] Erlend Grong and Anton Thalmaier. Curvature-dimension inequalities on sub-Riemannian manifolds obtained from Riemannian foliations : part I. *Math. Z.*, 282(1-2) :99–130, 2016.

[GT16b] Erlend Grong and Anton Thalmaier. Curvature-dimension inequalities on sub-Riemannian manifolds obtained from Riemannian foliations : part II. *Math. Z.*, 282(1-2) :131–164, 2016.

[GT16c] Erlend Grong and Anton Thalmaier. Stochastic completeness and gradient representations for sub-Riemannian manifolds. *arXiv e-prints*, page arXiv :1605.00785, May 2016.

[GT17] Sylvain Golénia and Françoise Truc. The magnetic Laplacian acting on discrete cusps. *Doc. Math.*, 22 :1709–1727, 2017.

[GW12] Arnaud Guillin and Feng-Yu Wang. Degenerate Fokker-Planck equations : Bismut formula, gradient estimate and Harnack inequality. *J. Differential Equations*, 253(1) :20–40, 2012.

[H $\ddot{6}$5] Lars Hörmander. L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator. *Acta Math.*, 113 :89–152, 1965.

[Har08] Gilles Hargé. Reinforcement of an inequality due to Brascamp and Lieb. *J. Funct. Anal.*, 254(2) :267–300, 2008.

[Hel98] Bernard Helffer. Remarks on decay of correlations and Witten Laplacians, Brascamp-Lieb inequalities and semiclassical limit. *J. Funct. Anal.*, 155(2) :571–586, 1998.

[Hel99] Bernard Helffer. Remarks on decay of correlations and Witten Laplacians. II. Analysis of the dependence on the interaction. *Rev. Math. Phys.*, 11(3) :321–336, 1999.

[Hel02] Bernard Helffer. *Semiclassical analysis, Witten Laplacians, and statistical mechanics*, volume 1 of *Series in Partial Differential Equations and Applications*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.

[Hel13] Bernard Helffer. *Spectral theory and its applications*, volume 139 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[HK11] Sebastian Haeseler and Matthias Keller. Generalized solutions and spectrum for Dirichlet forms on graphs. In *Random walks, boundaries and spectra*, volume 64 of *Progr. Probab.*, pages 181–199. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[Hör55] Lars Hörmander. On the theory of general partial differential operators. *Acta Math.*, 94 :161–248, 1955.

[HZ10] W. Hebisch and B. Zegarliński. Coercive inequalities on metric measure spaces. *J. Funct. Anal.*, 258(3) :814–851, 2010.

[Jer86] David Jerison. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition. *Duke Math. J.*, 53(2) :503–523, 1986.

[Joh00] Jon Johnsen. On the spectral properties of Witten-Laplacians, their range projections and Brascamp-Lieb's inequality. *Integral Equations Operator Theory*, 36(3) :288–324, 2000.

[JSC87] David Jerison and Antonio Sánchez-Calle. Subelliptic, second order differential operators. In *Complex analysis, III (College Park, Md., 1985–86)*, volume 1277 of *Lecture Notes in Math.*, pages 46–77. Springer, Berlin, 1987.

[Jui08] Nicolas Juillet. Transport de mesure et courbures de Ricci synthétiques dans le groupe de Heisenberg. In *Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 25. Année 2006–2007*, volume 25 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 85–104. Univ. Grenoble I, Saint, 2008.

[Ken07] Wilfrid S. Kendall. Coupling all the Lévy stochastic areas of multidimensional Brownian motion. *Ann. Probab.*, 35(3) :935–953, 2007.

[Ken09] Wilfrid S. Kendall. Brownian couplings, convexity, and shyness. *Electron. Commun. Probab.*, 14 :66–80, 2009.

[Ken10] Wilfrid S. Kendall. Coupling time distribution asymptotics for some couplings of the Lévy stochastic area. In *Probability* *and mathematical genetics*, volume 378 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 446–463. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[KL10] M. Keller and D. Lenz. Unbounded Laplacians on graphs : basic spectral properties and the heat equation. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 5(4) :198–224, 2010.

[KL12] Matthias Keller and Daniel Lenz. Dirichlet forms and stochastic completeness of graphs and subgraphs. *J. Reine Angew. Math.*, 666 :189–223, 2012.

[Kla09] Bo'az Klartag. A Berry-Esseen type inequality for convex bodies with an unconditional basis. *Probab. Theory Related Fields*, 145(1-2) :1–33, 2009.

[KLS95] R. Kannan, L. Lovász, and M. Simonovits. Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma. *Discrete Comput. Geom.*, 13(3-4) :541–559, 1995.

[KLW13] Matthias Keller, Daniel Lenz, and Radoslaw K. Wojciechowski. Volume growth, spectrum and stochastic completeness of infinite graphs. *Math. Z.*, 274(3-4) :905–932, 2013.

[KM16] Alexander V. Kolesnikov and Emanuel Milman. Riemannian metrics on convex sets with applications to Poincaré and log-Sobolev inequalities. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 55(4) :Art. 77, 36, 2016.

[KM17] Alexander V. Kolesnikov and Emanuel Milman. Brascamp-Lieb-type inequalities on weighted Riemannian manifolds with boundary. *J. Geom. Anal.*, 27(2) :1680–1702, 2017.

[KM18] Alexander V. Kolesnikov and Emanuel Milman. Poincaré and Brunn-Minkowski inequalities on the boundary of weighted Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 140(5) :1147–1185, 2018.

[KS87] S. Kusuoka and D. Stroock. Applications of the Malliavin calculus. III. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(2) :391–442, 1987.

[Kuw10] Kazumasa Kuwada. Duality on gradient estimates and Wasserstein controls. *J. Funct. Anal.*, 258(11) :3758–3774, 2010.

[Led94] Michel Ledoux. A simple analytic proof of an inequality by P. Buser. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121(3) :951–959, 1994.

[Led95] M. Ledoux. Remarks on logarithmic Sobolev constants, exponential integrability and bounds on the diameter. *J. Math. Kyoto Univ.*, 35(2) :211–220, 1995.

[Led96] Michel Ledoux. Isoperimetry and Gaussian analysis. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour,* *1994)*, volume 1648 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–294. Springer, Berlin, 1996.

[Led01] M. Ledoux. Logarithmic Sobolev inequalities for unbounded spin systems revisited. In *Séminaire de Probabilités, XXXV*, volume 1755 of *Lecture Notes in Math.*, pages 167–194. Springer, Berlin, 2001.

[Li84] Peter Li. Uniqueness of L^1 solutions for the Laplace equation and the heat equation on Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 20(2) :447–457, 1984.

[Li06] Hong-Quan Li. Estimation optimale du gradient du semi-groupe de la chaleur sur le groupe de Heisenberg. *J. Funct. Anal.*, 236(2) :369–394, 2006.

[Li07] Hong-Quan Li. Estimations asymptotiques du noyau de la chaleur sur les groupes de Heisenberg. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(8) :497–502, 2007.

[LLPP15] Carsten Lange, Shiping Liu, Norbert Peyerimhoff, and Olaf Post. Frustration index and Cheeger inequalities for discrete and continuous magnetic Laplacians. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54(4) :4165–4196, 2015.

[LMP19] Shiping Liu, Florentin Münch, and Norbert Peyerimhoff. Curvature and higher order Buser inequalities for the graph connection Laplacian. *SIAM J. Discrete Math.*, 33(1) :257–305, 2019.

[LP10] Françoise Lust-Piquard. Ornstein-Uhlenbeck semi-groups on stratified groups. *J. Funct. Anal.*, 258(6) :1883–1908, 2010.

[LY86] Peter Li and Shing-Tung Yau. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math.*, 156(3-4) :153–201, 1986.

[Mel08] Tai Melcher. Hypoelliptic heat kernel inequalities on Lie groups. *Stochastic Process. Appl.*, 118(3) :368–388, 2008.

[Mil11] Ognjen Milatovic. Essential self-adjointness of magnetic Schrödinger operators on locally finite graphs. *Integral Equations Operator Theory*, 71(1) :13–27, 2011.

[Mil18] Emanuel Milman. Spectral estimates, contractions and hypercontractivity. *J. Spectr. Theory*, 8(2) :669–714, 2018.

[MO13] Georg Menz and Felix Otto. Uniform logarithmic Sobolev inequalities for conservative spin systems with super-quadratic single-site potential. *Ann. Probab.*, 41(3B) :2182–2224, 2013.

[Moh88] Bojan Mohar. Isoperimetric inequalities, growth, and the spectrum of graphs. *Linear Algebra Appl.*, 103 :119–131, 1988.

[Moh91] Bojan Mohar. Some relations between analytic and geometric properties of infinite graphs. *Discrete Math.*, 95(1-3) :193–219, 1991. Directions in infinite graph theory and combinatorics (Cambridge, 1989).

[Moh13] Bojan Mohar. Many large eigenvalues in sparse graphs. *European J. Combin.*, 34(7) :1125–1129, 2013.

[Mon02] Richard Montgomery. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, volume 91 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[MT16] Ognjen Milatovic and Françoise Truc. Self-adjoint extensions of differential operators on Riemannian manifolds. *Ann. Global Anal. Geom.*, 49(1) :87–103, 2016.

[Ngu14] Van Hoang Nguyen. Dimensional variance inequalities of Brascamp-Lieb type and a local approach to dimensional Prékopa's theorem. *J. Funct. Anal.*, 266(2) :931–955, 2014.

[NSW85] Alexander Nagel, Elias M. Stein, and Stephen Wainger. Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties. *Acta Math.*, 155(1-2) :103–147, 1985.

[OV01] Felix Otto and Cédric Villani. Comment on : "Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations" [J. Math. Pures Appl. (9) **80** (2001), no. 7, 669–696 ; MR1846020 (2003b :47073)] by S. G. Bobkov, I. Gentil and M. Ledoux. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 80(7) :697–700, 2001.

[PP16] Mihai N. Pascu and Ionel Popescu. Shy and fixed-distance couplings of Brownian motions on manifolds. *Stochastic Process. Appl.*, 126(2) :628–650, 2016.

[SC94] L. Saloff-Coste. Convergence to equilibrium and logarithmic Sobolev constant on manifolds with Ricci curvature bounded below. *Colloq. Math.*, 67(1) :109–121, 1994.

[Str83] Robert S. Strichartz. Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold. *J. Funct. Anal.*, 52(1) :48–79, 1983.

[Str86] Robert S. Strichartz. Sub-Riemannian geometry. *J. Differential Geom.*, 24(2) :221–263, 1986.

[SV73] Daniel W. Stroock and S. R. S. Varadhan. Limit theorems for random walks on Lie groups. *Sankhyā Ser. A*, 35(3) :277–294, 1973.

[Var89] Nicolas Th. Varopoulos. Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels. I. The semigroup technique. *Bull. Sci. Math.*, 113(3) :253–277, 1989.

[Vey10] Laurent Veysseire. A harmonic mean bound for the spectral gap of the Laplacian on Riemannian manifolds. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348(23-24) :1319–1322, 2010.

[Vil09] Cédric Villani. Hypocoercivity. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 202(950) :iv+141, 2009.

[vRS05] Max-K. von Renesse and Karl-Theodor Sturm. Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(7) :923–940, 2005.

[Wan97a] Feng-Yu Wang. Logarithmic Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds. *Probab. Theory Related Fields*, 109(3) :417–424, 1997.

[Wan97b] Feng-Yu Wang. On estimation of the logarithmic Sobolev constant and gradient estimates of heat semigroups. *Probab. Theory Related Fields*, 108(1) :87–101, 1997.

[Wan00] Feng-Yu Wang. Functional inequalities for empty essential spectrum. *J. Funct. Anal.*, 170(1) :219–245, 2000.

[Wan12] Feng-Yu Wang. Generalized Curvature Condition for Subelliptic Diffusion Processes. *arXiv e-prints*, page arXiv :1202.0778, Feb 2012.

[Woj08] Radoslaw Krzysztof Wojciechowski. *Stochastic completeness of graphs*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2008. Thesis (Ph.D.)–City University of New York.