Algèbre 1 : Corrigé test 1

(I) Par la méthode du Pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y-z+3t=0 \\ x-2y+2z-t=1 \\ 2x+2y-2z+5t=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 & \\ 3y+3z-t=0 & (L_2 \leftarrow 2L_1-L_2) \\ 3y-z+2t=-1 & (L_3 \leftarrow L_1-L_3) \\ 4z-3t=1 & (L_4 \leftarrow 2L_1-L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3y+3z-t=0 \\ 4z-3t=1 \quad (L_3 \leftarrow L_2-L_3) \\ 4z-3t=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3y+3z-t=0 \\ 4z-3t=1 \\ \cancel{0=0} \quad (L_4-L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-y-z-t=\left(\frac{5}{12}-\frac{3}{4}-1\right)t=-\frac{4}{3}t \\ y=\frac{1}{3}(-3z+t)=-z+\frac{t}{3}=-\frac{1}{4}-\frac{3t}{4}+\frac{t}{3}=-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}t \\ z=\frac{1}{4}+\frac{3t}{4} \end{cases}$$

(système échelonné)

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S}=\left\{(x,y,z,t)=\left(0,-\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)+\alpha\left(-\frac{4}{3},-\frac{5}{12},\frac{3}{4},1\right),\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

(II) La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre si la seule combinaison linéaire $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ conduisant au vecteur nul est celle avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ +\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (L_1 - L_2) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \quad 3L_2 - L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

(système échelonné)

La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc libre.

Donc la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

$F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ est 3.

donc $F = \mathbb{R}^3$.

La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc aussi génératrice.

Elle est libre et génératrice donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

III $F = \text{Vect}\{(1,2,3), (1,-1,1)\}$

$(a,0,1) \in F$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$(a,0,1) = \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(1,-1,1)$

si et seulement si il existe de solution (λ_1, λ_2) au système :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{array}\right.$$

Or $(S) \iff \left\{\begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 &= a \\ 3\lambda_2 &= 2a \quad (2L_1 - L_2) \\ 2\lambda_2 &= 3a - 1 \quad (3L_1 - L_3) \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 &= a \\ 3\lambda_2 &= 2a \\ 0 &= \underbrace{4a - 3(3a-1)}_{= 3-5a} \quad (2L_2 - 3L_3) \end{array}\right.$

Ce système est échelonné et n'a des solutions que si la dernière équation $0 = 3 - 5a$ est satisfaite.

Donc : le vecteur $(a,0,1)$ appartient à F si et seulement si $\boxed{a = \frac{3}{5}}$.

IV $E_1 = \{ f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 2f(1) \}$.

$E_2 = \{ f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1) + 1$.

E_1 et E_2 sont des sous ensembles de l'espace vectoriel $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ (muni de + et de .)

*) E_1 est . non vide car $f_0 : x \in [0,1] \to 0 \in E_1$

. stable par addition : si $f, g \in E_1$

alors $(f+g)(0) = f(0) + g(0)$

$= 2f(1) + 2g(1) = 2(f+g)(1)$.

donc $f+g \in E_1$

. stable par multiplication par un scalaire

si $f \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$(\lambda f)(0) = \lambda(f(0)) = \lambda 2f(1))$

$= 2 (\lambda f)(1)$.

donc $(\lambda f) \in E_1$

Donc E_1 est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$.
et donc E_1 est un espace vectoriel.

*) $f_1 : x \in [0,1] \to f(x) = 1 - x \in E_2$ car $f_1(0) = 1$, $f_1(1) = 0$.

mais $(2f_1)(0) = 2 \neq (2f_1)(1) + 1 = 1$.

donc $2f_1 \notin E_2$.

Donc E_2 n'est pas un espace vectoriel.