Corrigé : Master 2 IREF
Finance en temps discret

Ex I : On pose $M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

*) M_n est bien mesurable pour $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$

*) $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$

$$= \mathbb{E}[\underbrace{M_n}_{\text{mesurable}} X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= M_n \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n \mathbb{E}[X_{n+1}]$$

car X_{n+1} est indépendant de $X_1 \dots X_n$

$$= \alpha_n M_n.$$

d'où $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$

car $M_n \geq 0$ et $0 < \alpha_n \leq 1$.

Donc $(M_n)_{n \geq 0}$ est une sur-martingale.

Ex II. 1) 2) } cours.

3) Prenons $\varphi_1^{(0)} = -1$ et $\varphi_1^{(1)} = 1$.

on a : $V_0(\omega) = \varphi_1^{(0)} S_0^{(0)} + \varphi_1^{(1)} S_0^{(1)}$
$= -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$
pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$.

et $V_1(\omega) = \varphi_1^{(0)} S_1^{(0)} + \varphi_1^{(1)} S_1^{(1)}$

$$= \begin{cases} -1 \times \cancel{1,1} + 1 \times 1,1 = 0 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ -1 \times 1,2 + 1 \times 1,2 = 0,1 & \text{si } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

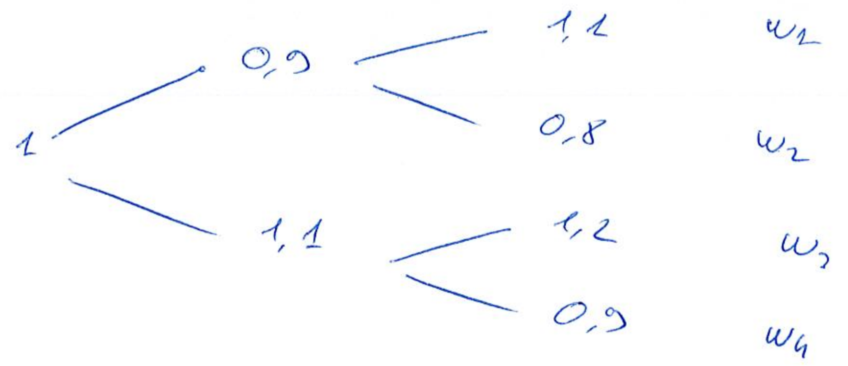
Donc $V_1(\omega) \geq 0$ $\forall \omega$ et $V_1(\omega_2) > 0$.

C'est donc une stratégie d'arbitrage.

Le marché n'est donc pas viable.

Ex 3 : Rq : $S_0^{(0)} = S_1^{(0)} = S_2^{(0)} = 1$.

Les prix des actifs sont donc égaux aux prix des actifs régularisés.



1) On a : $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

$\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1^{(1)}) = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$

car $(S_1^{(1)})^{-1}(\{0,9\}) = \{\omega_1, \omega_2\}$

$(S_1^{(1)})^{-1}(\{1,1\}) = \{\omega_3, \omega_4\}$

$\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1^{(1)}, S_2^{(1)}) = \mathcal{P}(\Omega)$

car si on observe les prix jusqu'au temps 2, on sait si on est dans ω_1, ω_2, ω_3 ou ω_4.

donc $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\} \in \mathcal{F}_2$

La tribu qu'ils engendrent est tout : $\mathcal{P}(\Omega)$.

2) L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[S_2^{①} | \tilde{\mathcal{F}}_1]$ est donc constante sur l'ensemble $\{\omega_1, \omega_2\}$ et pour $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$.

$$\mathbb{E}[S_2^{①} | \tilde{\mathcal{F}}_1] = \frac{1}{\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\})} \left[\mathbb{P}(\{\omega_1\}) S_2^{①}(\omega_1) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) S_2^{①}(\omega_2) \right]$$

Dans le cas où on considère : $\mathbb{P}_1$. pour $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 [S_2^{①} | \tilde{\mathcal{F}}_1](\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} \cdot 1{,}1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}8 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1{,}1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \\ &= 0{,}95 \\ &\neq S_1^1(\omega) \end{aligned}$$

3) Puisque $\tilde{S}_n^{①} = S_n^{①}$ pour $n = 0, 1, 2$.

Sous $\mathbb{P}_1$, $\tilde{S}_n^{①}$ n'est pas une martingale donc $\mathbb{P}_1$ n'est pas une probabilité risque-neutre.

(définition : voir cours).

4) $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

donc pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{E}_2[S_1^{(1)} | \mathcal{F}_0](\omega) = \mathbb{E}[S_1^{(1)}]$

$$= \frac{1}{6} \cdot 0{,}9 + \frac{2}{6} \cdot 0{,}9 + \frac{2}{6} \cdot 1{,}1 + \frac{1}{6} \times 1{,}1$$

$$= 1 \quad (= S_0^{(1)})$$

- Pour $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$.

$$\mathbb{E}_2[S_2^{(1)} | \mathcal{F}_1](\omega) = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{2}{6}} \left(\frac{1}{6} \cdot 1{,}2 + \frac{2}{6} \cdot 0{,}8 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1{,}1 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}8$$

$$= 0{,}9 = S_1^{(1)}(\omega)$$

- Pour $\omega \in \{\omega_3, \omega_4\}$

$$\mathbb{E}_2[S_2^{(1)} | \mathcal{F}_1](\omega) = \frac{1}{\frac{2}{6} + \frac{1}{6}} \left(\frac{2}{6} \cdot 1{,}2 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}9 \right)$$

$$= \frac{2}{3} \times 1{,}2 + \frac{1}{3} \times 0{,}9 = 1{,}1 = S_1^{(1)}(\omega)$$

~~Le~~ prix des actifs risqués actualisés ~~est~~ donc une martingale sous la probabilité $\mathbb{P}_2$

Donc $\mathbb{P}_2$ est une probabilité risque neutre.

5) Il existe une probabilité risque-neutre donc le marché est viable.

Exc 4 : 1) $r = 0,1$, $S_1^{(0)} = 1+r = 1,1$

$S_2^{(1)} = (1+r)^2 = 1,21$.

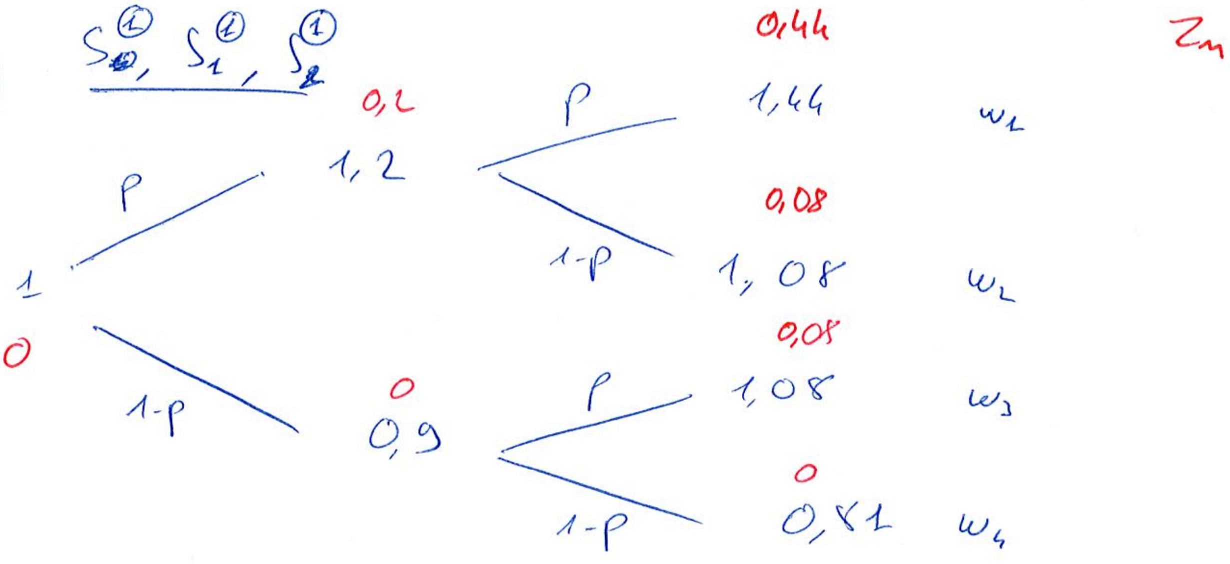
2) D'après le cours, ce marché est viable et complet si et seulement si $d < r < u$.

3) On a bien $d < r < u$ donc le marché est viable et complet.

Le paramètre p de l'unique probabilité risque neutre est donné par : $p = \dfrac{r-d}{u-d} = \dfrac{0,1+0,1}{0,2+0,1} = \dfrac{2}{3}$

On notera $\mathbb{P}^*$ ~~la~~ probabilité associée.

4) $S_0^{(1)}, S_1^{(1)}, S_2^{(1)}$



option d'achat américaine de prix d'exercice K d'échéance $N = 2$.

$$Z_n = \left(S_n^{(1)} - 1 \right)_+ \quad \text{(en rouge)}$$

5) Notons U_n la valeur de l'option américaine au temps n.

On a $\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max\left(Z_n, \frac{1}{1+r} E[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]\right) \end{cases}$ pour $0 \leq n \leq N-1$

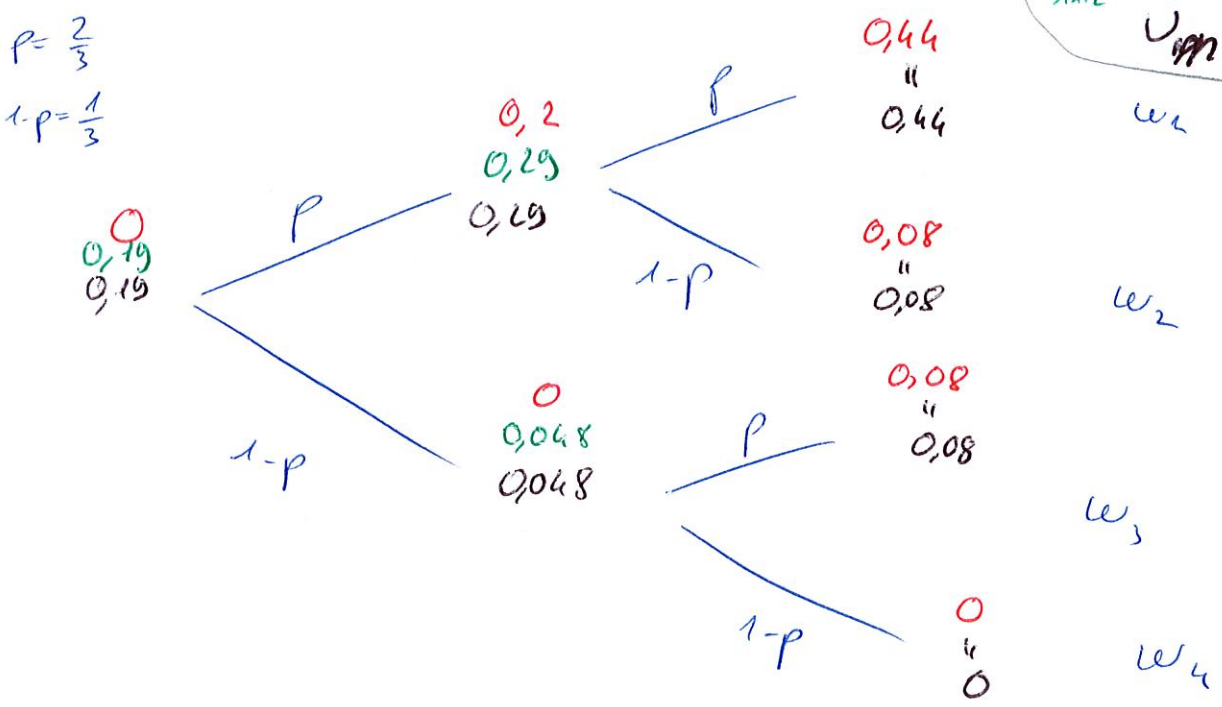
Notons en vert $\frac{1}{1+r} E[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$ (en vert)

et U_n en noir

Z_n

$\frac{1}{1+r} E[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$

U_n



- $\frac{1}{1,1}\left(\frac{2}{3}\, 0,44 + \frac{1}{3}\, 0,08\right) = \frac{0,32}{1,1} \simeq 0,29$
- $\frac{1}{1,1}\left(\frac{2}{3} \cdot 0,08 + \frac{1}{3}\, 0\right) = \frac{0,16}{3 \times 1,1} \simeq 0,048$
- $\frac{1}{1,1}\left(\frac{2}{3}\, \frac{0,32}{1,1} + \frac{1}{3}\, \frac{0,16}{3 \times 1,1}\right) \simeq 0,19$

7 Un temps d'arrêt optimal pour l'exercice de l'option américaine est :

$$T_0 = \inf \{ n \geq 0,\ U_n = Z_n \}.$$

(C'est le premier temps d'arrêt optimal).

8 Ici pour tout $\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3$ ou ω_4 on a $T_0(\omega) = 2$.