Master Mathématiques appliquées et statistiques 6 février 2017

DS: Chaînes de Markov

durée 2h

Exercice 1. On lance successivement et indépendamment une pièce. Cette pièce a une probabilité p $(0 < p < 1)$ de tomber sur pile.

On considère la suite de variables aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ définie de la manière suivante: $X_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$X_n = 1$ si on a obtenu au moins un pile au cours des n premiers lancers,

$X_n = 0$ sinon.

Pour $n \geq 1$, notera également $U_n = 1$ si on a obtenu pile au n-ème lancer et $U_n = 0$ si on a obtenu face.

1) Justifier que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène et que sa matrice de transition est donnée par:

$$P := \begin{pmatrix} q & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Préciser les classes communiquantes de la matrice et leur récurrence ou transience.

3) Calculer $\mathbb{P}_0(X_n = 0)$.

4) En déduire la matrice P^n.

5) On note $T_1 = \inf\{n \geq 0, X_n = 1\}$ le temps d'atteinte de 1. Pour $n \geq 1$ calculer $\mathbb{P}_0(T_1 = n)$.

6) Calculer $\mathbb{E}_0[T_1]$

Exercice 2. On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'espace d'états $E = \{1, 2, 3\}$ de matrice de transition P donnée par:

$$P := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Donner les conditions nécéssaires et suffisantes sur a et b pour que P soit une matrice stochastique.

2) Dans cette question on prend alors $a = 1$, tracer le graphe orienté associé à P puis préciser les classes communiquantes de la matrice et leur récurrence ou transience.

3) On suppose maintenant que $0 \leq a < 1$, montrer que la matrice est irréductible. Calculer sa période. (On pourra séparer les cas $a = 0$ et $0 < a < 1$).

4) Montrer qu'il existe une unique probabilité μ invariante pour P que l'on calculera.

5) On considère ici que $a = 1/3$ et $b = 2/3$ et que la loi initiale de X_0 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{2}, \, \mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{1}{3}, \, \mathbb{P}(X_0 = 3) = \frac{1}{6}.$$

Pour $n \geq 0$, donner la loi de chaîne au temps n.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace d'état E. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ sa filtration naturelle.

1) Donner la définition d'un temps d'arrêt associé à la filtration $\mathcal{F}_n$.

2) Soit $A \subset E$, démontrer que le temps aléatoire $T_A = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}$ est bien un temps d'arrêt.

3) Soit $i, j \in E$, justifier rapidement si les temps aléatoires suivants sont des temps d'arrêts:

$$S_1 = \inf\{n \geq 0, X_n = i, X_{n+1} = j\},$$
$$S_2 = \inf\{n \geq 1, X_{n-1} = i, X_n = j\}.$$

Exercice 4. (Protocole de transmission TCP). Soit $0 < p < 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition:

$$P(k, k+1) = p^k,$$
$$P\left(k, \left[\frac{k}{2}\right]\right) = 1 - p^k$$

pour $k \in \mathbb{N}$ et $P(k, j) = 0$ si $j \notin \{k+1, \left[\frac{k}{2}\right]\}$. ($\left[\frac{k}{2}\right]$ désigne la partie entière du réel $\frac{k}{2}$.)

1) Tracer la partie du graphe orienté pour les états de 0 à 5.

2) Montrer que la chaîne est irréductible.

3) Est-elle apériodique?

4) Rappeler la définition d'un état récurent et d'un état transient puis rappeler les 2 critères de transience et de récurrence vu en cours.

5) Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$, on ait $\mathbb{E}_k[X_1] \leq k - c$ où $\mathbb{E}_k[\cdot]$ désigne l'espérance sachant que $X_0 = k$.

Rq: Ce protocole de transmission est effectivement très utilisé dans le transfert des données par internet.