CHAPITRE 2 : CLASSES COMMUNIQUANTES, PÉRIODICITÉ

MICHEL BONNEFONT

Master MIMSE Bordeaux

1. Classes communiquantes

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov (homogène) de matrice de transition P sur un espace d'états discret E. Dans ce chapitre, on notera également par $P_{i,j}$ le coéfficient (i,j) de la matrice P.

Définition 1.1. Soit $i,j \in E$. On dit que i **conduit** à j (ou que j est accessible/atteignable depuis i) s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^n_{i,j} > 0$. On note $i \longrightarrow j$.

Remarque 1.2. Par convention, $P^0 = I_E$ dons pour tout $i \in E$, $P^0_{i,i} = 1$. On a donc toujours $i \longrightarrow i$.

Exercice 1.3. Soit $i \neq j$, $i,j \in E$. Montrer que $i \longrightarrow j$ si et seulement si il existe un chemin allant de i à j dans le graphe orienté associé à P.

Définition 1.4. On dit que i et j **communiquent** si $i \longrightarrow j$ et $j \longrightarrow i$. On note $i \longleftrightarrow j$.

Proposition 1.5. *Si $i \longrightarrow j$ et $j \longrightarrow k$ alors $i \longrightarrow k$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $n,m \geq 0$ tels que $P^n_{i,j} > 0$ et $P^m_{j,k} > 0$. On a alors
$$P^{n+m}_{i,k} = \sum_{l \in E} P^n_{i,l} P^m_{l,k} = P^n_{i,j} P^m_{j,k} + \sum_{l \in E, l \neq j} P^n_{i,l} P^m_{l,k} > 0.$$
Donc on a bien $i \longrightarrow k$. □

Proposition 1.6. $\longleftrightarrow$ *est une relation d'équivalence.*

Démonstration.
- Réflexivité : on a bien $i \longleftrightarrow i$ pour tout $i \in E$.
- Symétrie : si $i \longleftrightarrow j$ on a bien évidemment $j \longleftrightarrow i$.
- Transitivité : si $i \longleftrightarrow j$ et $j \longleftrightarrow k$ on a alors $i \longleftrightarrow k$ d'après la proposition précédente. □

Définitions 1.7.
- Les classes d'équivalence pour la relation $\longleftrightarrow$ sont appelées **classes communiquantes**.
- La matrice P est dite **irréductible** si elle n'admet qu'une classe communiquante.

Définitions 1.8.

— Une classe $\mathcal{C}$ est dite **fermée** (ou **close**) si : $\begin{cases} i \in \mathcal{C} \\ i \longrightarrow j \end{cases} \Rightarrow j \in \mathcal{C}$.
— Un état i est dit **absorbant** si $\{i\}$ est une classe fermée.
— un état i est dit **de non retour** si pour tout $n \geq 1$, $Q^n_{i,i} = 0$.

Exemple 1.9. Déterminer les classes communiquantes pour la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.10. Il existe trois types de classe singleton :
— absorbant,
— de non retour,
— un état où on peut rester sur place mais dès qu'on en part c'est pour de bon.

2. Périodicité

Définition 2.1. Soit $i \in E$ un état. On définit la **période** $d(i)$ de i par

$$d(i) := \text{pgcd}\{n \geq 1, P^n_{i,i} > 0\}$$

avec la convention $\text{pgcd}(\emptyset) = \infty$. Si $d(i) = 1$ on dit que l'état i est **apériodique**.

Exercice 2.2. Déterminer les périodes de tous les états de la matrice de l'exemple 1.9.

Exercice 2.3. Montrer sur un exemple que l'on peut avoir : $P^{d(i)}_{i,i} = 0$.

Remarque 2.4. Si $P_{i,i} > 0$ alors $d(i) = 1$ et i est apériodique.

Exemple 2.5. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$
Soit $P = (P_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ donnée, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ par $P_{i,i-1} = P_{i,i+1} = 1/2$. Déterminer la période de tous les états de cette matrice.

Théorème 2.6. *La période est une propriété de classe. C'est-à-dire, si les états i et j sont dans la même classe communiquante, alors $d(i) = d(j)$*

Démonstration. Soient $i, j \in E$, $i \neq j$, appartenant à la même classe communiquante, c'est-à-dire $i \longleftrightarrow j$. Montrons que $d(i) = d(j)$. Puisque $i \longleftrightarrow j$, il existe deux entiers n et $m \geq 1$ tels que $P^n_{i,j} > 0$ et $P^m_{j,i} > 0$. On a donc $P^{n+m}_{i,i} > 0$ et donc $d(i)|n+m$.

On remarque également que l'ensemble $\{k \geq 1, P^k_{j,j} > 0\}$ n'est pas vide (car $P^{n+m}_{j,j} > 0$).

Soit $k \geq 1$ tel que $P^k_{j,j} > 0$, on a $P^{n+m+k}_{i,i} \geq P^n_{i,j} P^k_{j,j} P^m_{j,i} > 0$ et donc $d(i)|n+m+k$. Or $d(i)|n+m$ d'où $d(i)|k$. On a donc obtenu :

$$\text{si } k \geq 1 \text{ satisfait } P^k_{j,j} > 0, \text{ alors } d(i)|k.$$

On en déduit que $d(i)|\text{pgcd}\{k \geq 1, P^k_{j,j} > 0\} := d(j)$. Par symétrie des rôles de i et de j, on a également $d(j)|d(i)$ et donc $d(i) = d(j)$. □

Proposition 2.7.

$$i \text{ est apériodique } \iff \exists n_0 \geq 1, \forall n \geq n_0, P^n_{i,i} > 0.$$

Démonstration.

— Tout d'abord, si $P^{n_0}_{i,i} > 0$ et $P^{n_0+1}_{i,i} > 0$, le pgcd de n_0 et $n_0 + 1$ étant 1, on obtient immédiatement que la période de i est 1.

— Supposons maintenant que i est apériodique. Soit $N = \{n > 0, P^n_{i,i} > 0\}$, i est apériodique donc $\mathrm{pgcd}(N) = 1$. Montrons qu'il existe $m, n \in N$ tels que $n = m + 1$. L'ensemble N est clairement stable par addition. Posons $G = \{n - m, n \in N, m \in N\}$. G est donc un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, donc G s'écrit $G = k\mathbb{Z}$. De plus, par Bezout, $k = \mathrm{pgcd}(N) = 1$. Donc $G = \mathbb{Z}$ et en particulier il existe $n, m \in N$ tel que $n = 1 + m$.

Soit maintenant $n_0 := m^2$. Soit $k \geq n_0$, la division euclidienne de $k - m^2$ par m donne

$$\begin{aligned} k &= m^2 + mq + r \quad \text{ avec } q \geq 0 \text{ et } 0 \leq r < m \\ &= m^2 + mq + mr + r - mr \\ &= m(m - r + q) + r(m + 1) \\ &= m(m - r + q) + rn \end{aligned}$$

Puisque $m - r + q \geq 0$, la stabilité de N par addition donne que $k \in N$; c'est à dire $P^k_{i,i} > 0$. □

Proposition 2.8. *Si E est fini alors P est irréductible et apériodique si et seulement si $\exists n \geq 1$ tel que $\forall i, j \in E, P^n_{i,j} > 0$.*

Démonstration.

— Supposons que P est irréductible et apériodique. Alors

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in E^2, \exists n_{i,j} \in \mathbb{N}, P^{n_{i,j}}_{i,j} > 0, \\ \forall i \in E, \exists m_i \geq 1, \forall m \geq m_i, P^{m_i}_{i,i} > 0. \end{cases}$$

Soit $N = \max_{(i,j) \in E^2}(n_{i,j})$ et $M = \max_{i \in E}(m_i)$, posons $N_0 = N + M$. Soit $l, k \in E$ on a

$$\begin{aligned} P^{N_0}_{l,k} &= \left(P^{n_{l,j}} P^{M+N-n_{l,k}}\right)_{l,k,j} \\ &= \sum_{p \in E} P^{n_{p,j}}_{l,p} P^{M+N-n_{i,j}}_{p,j} \geq P^{n_{l,k}}_{l,k} P^{M+N-n_{l,k}}_{k,k} > 0 \end{aligned}$$

— Réciproquement, supposons qu'il existe $n \in N$, tel que pour tout $i, j \in E$, $P^n_{i,j} > 0$. On a donc $i \longrightarrow j$, $j \longrightarrow i$ et donc $i \longleftrightarrow j$. Tous les états communiquent. On a une seule classe communiquante : la matrice P est irréductible. Montrons maintenant que P est apériodique, soit $i \in E$, on a

$$P^{n+1}_{i,i} = \sum_{j \in E} P^n_{i,j} P_{j,i}$$

La matrice P étant irréductible, il existe $j_0 \in E$ tel que $P_{i,j_0} > 0$. Par hypothèse $P^n_{i,j_0} > 0$. Par conséquent, $P^{n+1}_{i,i} > 0$. Or par hypothèse on a également $P^n_{i,i} > 0$. Le pgcd de n et $n+1$ est 1 on obtient que i et donc P est apériodique.

$\square$