MOSE 1003 2011/2012
feuille 2 : Développement limités, fonctions de plusieurs variables, Intégration de fonctions à plusieurs variables

Exercice 1 Donner le développement limité à l'ordre 2 au point 0 de

$$f(x) = ln(1+x).$$

Quelle est la limite quand $x \to 0$ de

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}?$$

Exercice 2 Soit $f(x) = \cos(\sin x)$. Calculer les dérivées premières et deuxièmes de f. Calculer $f(0), f'(0)$ et $f''(0)$. En déduire le developpement limité de f à l'ordre 2 au point 0.
En déduire la limite, quand $x \to 0$ de

$$\frac{\cos(\sin x)-1}{x^2}.$$

Exercice 3 Calculer les dérivées partielles de $f(x) = xy^2 + y^3$. trouver les points critiques de la fonction f (c'est-à-dire les points qui annulent à la fois les dérivées partielles par rapport à la variable x en à la variable y).

Exercice 4 Calculer les points critiques des fonctions de 2 variables suivantes. En effectuant un développement de Taylor en ces points, préciser s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum, d'un point selle ou d'un point "classique".

$$f(x) = x^3 - 3x + y^2,$$

$$g(x) = x^2(1+y^4) + y^2.$$

Exercice 5 Soit $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int\int_D x^2 y \; dxdy,$$

$$J = \int\int_D x + x^2 y \; dxdy.$$

Exercice 6 Soit $D = [0,1] \times [0,1]$. Calculer l'intégrale

$$I = \int\int_D e^x e^y \sqrt{e^y+1} \; dxdy,$$

Exercice 7 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 4\}$. Calculer les intégrales

$$I = \int\int_D e^{x^2+y^2} \; dxdy,$$

$$J = \int\int_D (x^2+y^2)^{7/2} \; dxdy.$$