

MOSE 1003 2011/2012
feuille 3 : Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} y' + 5y &= 3 && \text{avec la condition initiale } y(0) = 0 \\ y' + 3y &= 4e^x && \text{avec la condition initiale } y(0) = -2 \\ y' + y &= xe^{-x} + 1 \\ 3y' + 2y &= x^3 + 6x + 1 \\ y' - y &= \sin(x) + 2\cos(x) \\ y' &= 3y + \sin(3x) \\ y' &= 3y + \sin(3x) + \sin(2x) \end{aligned}$$

Exercice 2 Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants :

$$\begin{aligned} y'(x) &= x y(x) & y'(x) &= \frac{1}{x} y(x) & y'(x) &= x^2 y(x) \\ y'(x) &= \frac{1}{x^2} y(x) & y'(x) &= e^x y(x) & y'(x) &= \frac{x y(x)}{\sqrt{4-x^2}} \\ y'(x) &= \log(x) y(x) & y'(x) &= \sin(x) \cos(x) y(x) \end{aligned}$$

Exercice 3 Déterminer les solutions (uniques !) des problèmes de l'exercice précédent à satisfaire

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 & y(1) &= \pi & y(1) &= e \\ y(2) &= 1 & y(0) &= e & y(2) &= 0 \\ y(1) &= 1 & y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 4 Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants :

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) \quad y'(x) + \cos(x)y(x) = 0 \quad xy' + 3y = 0$$

Exercice 5 Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes associés aux problèmes ci-dessus.

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) + (x+1)^2 \cos(x) \quad y'(x) + \cos(x)y(x) = \sin(x) \cos(x) \quad xy' + 3y = x^2$$

Exercice 6 Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes suivantes

$$(1+x^2)y'(x) - 2xy(x) = (1+x^2)^2 \quad y'(x) + 2xy(x) = 2xe^{-x^2} \quad y'(x) = x^2(1-y(x))$$

Exercice 7 On considère une population formé de N individus et évoluant en fonction du temps $t > 0$.

1. Dans le modèle de Malthus on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.

- (a) Justifier que dans ce modèle N vérifie l'équation $\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = kN(t)$ pour une certaine constante k . On suppose désormais que N est dérivable. Déduire que $N'(t) = kN(t)$.
- (b) Déterminer $N(t)$ si à l'instant $t = 0$ la population est de N_0 individus.
- (c) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?

2. Le modèle de Verhulst prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale N^* et la population à l'instant t . On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et N est solution de l'équation différentielle (**non linéaire**) $N'(t) = rN(t)(N^* - N(t))$ (appelée équation logistique).

(a) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = 1/N(t)$. Calculer N' en fonction de y et y' . Justifier que y est dérivable puis calculer N' en fonction de y et y' .

(b) Remplacer N' et N par leurs expressions en fonctions de y' et y dans l'équation logistique et vérifier que y est solution de l'équation différentielle **linéaire**

$$y' = r(1 - Ny).$$

(c) Résoudre l'équation précédente.

(d) En déduire que $N(t) = \frac{N^*}{1 + Ke^{-rN^*t}}$ avec une constante réelle K .

(e) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 8 Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction Q est donc solution de l'équation différentielle $y' = -\mu y$ où μ est une constante propre à la substance radioactive.

(a) On appelle temps de demi-vie pour une substance radioactive le temps T nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent, trouver une relation reliant T et μ .

(b) Pour le carbone-14, T est environ de 5730 ans, que vaut approximativement μ ?

(c) L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du carbone-14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 (penser à utiliser le temps de demi-vie du carbone-14).

(d) Même question avec une analyse plus fine qui donne 42%

Exercice 9* Les problèmes suivants sont des équations différentielles **non linéaires** de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n$. La *méthode de Bernoulli* consiste à les réduire à des problème linéaires de première ordre en substituant $z(x) = y(x)^{1-n}$. Donnez ensuite la solution unique et précisez l'intervalle maximal d'existence.

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x) + y(x)^2, \\ y(0) &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y'(x) = y(x) - 2xy(x)^3 \\ 2y(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) &= xy(x)^2 + \frac{xy(x)}{1+x^2} \\ y(0) &= -3 \end{cases}$$