Université Bordeaux 1, L3, Probabilités 2012/2013

DM1 de Probabilités

Corrigé succinct

Exercice 1

1)

(a) $A \cap B \cap C$

(b) $(A \cup B \cup C)^c$

(c) $A \cup B \cup C$

(d) $A \cap B^c \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C^c \cup A^c \cap B^c \cap C = D$

(e) $D \cup A^c \cap B^c \cap C^c$

2) $\Omega = \{1, .., 6\}^4$ tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, P uniforme,

$\text{Card } \Omega = 6^4$

(a) On note A l'événement : au moins deux dés ont un résultat identique

A^c est l'événement : tous les résultats sont différents. On a $\text{Card } A^c = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

6 possibilités pour le 1^{er} dé

5 ———— $2^{ème}$

4 ———— $3^{ème}$

3 ———— $4^{ème}$

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{\text{Card } A^c}{\text{Card } \Omega} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} = \frac{5}{18}$$

On a donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{18}$

(b) On choisit les deux dés qui auront un résultat identique : $\binom{4}{2}$ possibilités

Pour le 1er : 6 possibilités

Pour le 2ème : 1 possibilité

Pour les deux autres 5×4 possibilités

Soit B l'événement : exactement deux dés identiques. Alors Card $B = \binom{4}{2} \times 6 \times 5 \times 4$

$= 6 \times 6 \times 5 \times 4$

Donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{6 \times 6 \times 5 \times 4}{6^4} = \dfrac{5}{9}$

3) Ω = sous ensembles à 5 éléments de l'ensemble des cartes. Tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, proba uniforme. Card $\Omega = \binom{52}{5}$

(a) Soit A l'événement : on tire au moins une paire

A^c : pas de paire

Il y a 13 figures différentes

On en choisit 5 parmi 13 : $\binom{13}{5}$ possibilités

Pour chaque figure on a 4 possibilités

On obtient $\quad \text{Card } A^c = \binom{13}{5} 4^5$

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{\binom{13}{5} 4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{2^6 \times 3 \times 11}{5 \times 7^2 \times 17} \simeq 0{,}507$$

$\mathbb{P}(A) \simeq 0{,}493$

(b) On choisit une figure pour la paire : 13 possibilités. Il y a $\binom{4}{2}$ paires dans cette figure.

Pour les 3 cartes restantes, même raisonnement qu'à la question précédente

$\binom{12}{3} \times 4^3$ possibilités

Soit B l'événement : exactement une paire

$$\mathbb{P}(B) = \frac{13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3}{\binom{52}{5}} = \frac{2^5 \times 11}{7^2 \times 17} \simeq 0,42$$

(c) Soit C l'événement : exactement deux paires

Choix des figures pour les paires $\binom{13}{2}$

Nombre de paires $\binom{4}{2}^2$

Choix de la dernière carte : 44 possibilités

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \times 44}{\binom{52}{5}} = \frac{2 \times 3^2 \times 11}{5 \times 7^2 \times 17} \simeq 0,0475$$

Pour la question suivante on introduit l'ordre de tirage : Ω est maintenant l'ensemble des applications injectives de $\{1.., 5\}$ dans l'ensemble des 52 cartes. $\text{Card}\,\Omega = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$

On note D l'événement : parmi les 3 premières cartes on a tiré exactement une paire et E l'événement : on obtient un brelan

Il y a 13 choix possibles pour la figure de la paire puis 12 choix pour la figure de la 3ème carte puis 49×48 choix pour les deux dernières

$$\text{Card } D = 13 \binom{4}{2} \times 12 \times 4 \times 3! \times 49 \times 48$$

figure de la paire

nombre de paires

figure restante

nombre de singletons

ordre de tirage

$$\mathbb{P}(D) = \frac{13 \binom{4}{2} \times 12 \times 4 \times 3!}{52 \times 51 \times 50} = \frac{2^3 \times 3^2}{5^2 \times 17}$$

Calculons $\text{Card}(E \cap D)$

Il faut tirer 1 carte de même figure que la paire puis une carte de figure différente

2 possibilités pour la 3ème du brelan

40 possibilités pour l'autre

2 possibilités pour l'ordre de tirage

$$\text{Card}(E \cap D) = 13 \binom{4}{2} \times 12 \times 4 \times 3! \times 2 \times 40 \times 2$$

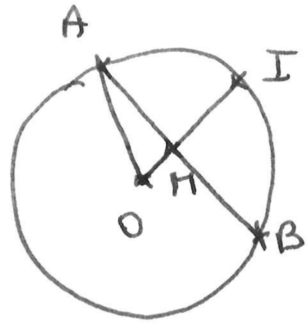
On obtient $\mathbb{P}(E|D) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{\text{Card}(E \cap D)}{\text{Card}(D)}$

$$= \frac{2 \times 40 \times 2}{49 \times 48}$$

$$\mathbb{P}(E|D) = \frac{2 \times 5}{3 \times 7^2} \simeq 0{,}068$$

Exercice 2

1)



On a $L = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Dans cette question $X = 2 \sin \arccos(OM)$

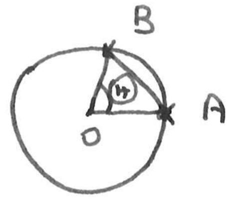
où $OM = U$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$

$$X = 2\sqrt{1 - U^2}$$

$$\mathbb{P}(X \geq L) = \mathbb{P}\left(\sqrt{1-U^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2>



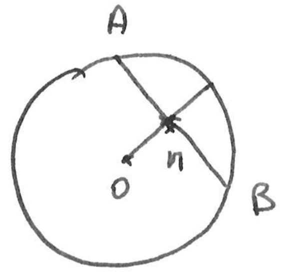
$AB = 2\left|\sin \frac{\Theta}{2}\right|$ où Θ suit une loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$

$$\mathbb{P}(AB \geq L) = \mathbb{P}\left(\left|\sin \frac{\Theta}{2}\right| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\Theta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]\right)$$

$$\mathbb{P}(AB \geq L) = \frac{1}{3}$$

3>



Comme M a une loi uniforme sur le disque on a pour $t \in [0,1]$ $\mathbb{P}(OM \leq t) = \dfrac{\pi t^2}{\pi}$

donc OM a pour densité $f_{OM}(r) = 2r \, 1_{[0,1]}(r)$

Comme à la question 1> on a $X = 2\sqrt{1 - OM^2}$

donc $\mathbb{P}(X \geq L) = \mathbb{P}\left(OM \leq \frac{1}{2}\right)$

$$\mathbb{P}(X \geq L) = \frac{1}{4}.$$

UNIVERSITÉ BORDEAUX I
LICENCE L3

PROBABILITÉS
2012/13

Exercice 3

La loi triangulaire

La loi triangulaire est beaucoup utilisée en traitement du son. Sa densité est donnée par,

$$f_X(x) = \frac{1}{a^2}(a-|x|)\,\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

1) Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité et représenter cette densité.
On a bien $f \geq 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{a^2}(a-|x|)\,dx = 2\int_0^a \frac{1}{a^2}(a-x)\,dx = 2\Big[\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}\Big]_0^a = 1.$$

2) Calculer son espérance et sa variance.
On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{x}{a^2}(a-|x|)\,dx = 0$$

et

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{a^2}(a-|x|)\,dx = 2\int_0^a \frac{ax^2 - x^3}{a^2}dx$$
$$= 2\Big[\frac{ax^3}{3a^2} - \frac{ax^4}{4a^2}\Big]_0^a = \frac{a^2}{6}.$$

D'où $Var(x) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{a^2}{6}$.

3) Calculer $\mathbb{P}(2|X| \geq a)$.
Par symétrie, on a

$$\mathbb{P}(2|X| \geq a) = \mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{a}{2}\right)$$
$$= 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} f_X(x)dx = 2\Big[\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}\Big]_{\frac{a}{2}}^{a} = 2\left(1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)\right) = \frac{1}{4}.$$

4) On considère ici $a = 1$. Donner la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{|X|}$. On pourra commencer par déterminer l'ensemble de ses valeurs, sa fonction de répartition puis sa densité.

X est à valeurs dans $[-1,1]$ donc Y est à valeurs dans $[0,1]$. Soit $t \in [0,1]$, la fonction de répartition de Y est donnée par

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(\sqrt{|X|} \leq t) = \mathbb{P}(-t^2 \leq X \leq t^2)$$
$$= 2\int_0^{t^2} f_X(x)dx = 2\int_0^{t^2} 1 - x dx = 2\Big[x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^{t^2} = 2t^2 - t^4.(1 - \frac{t^2}{2}).$$

Si $t < 0$, on a $F_Y(t) = 0$ et si $t > 1$, $F_Y(t) = 1$.
La densité f_Y de Y s'obtient en dérivant la fonction de répartition:

$$f_Y(t) = (4t - 4t^3)\mathbf{1}_{[0,1]}(t) = 4t(1-t^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(t) \;\; (\geq 0).$$