université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017** **SESSION 1 DE PRINTEMPS** **PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales et L3 Ingénierie Mathématique **CODE UE** : M1MA6M11 **Epreuve : Probabilités** **Date : 26/04/2016** **Heure : 14h30-17h30 Durée : 3h** *Responsable de l'épreuve*: M. Bonnefont *Documents*: Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Département Licence

Exercice 1. Soient $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$ deux réels. On pose $q = 1 - p$ et $s = 1 - r$.

0) Soient A et B deux évènements indépendants tels que $\mathbb{P}(A) = p$ et $\mathbb{P}(B) = r$. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = p + r - pr \text{ et } \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = qs.$$

Soient maintenant X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs p et r.

Rappel: La loi géométrique de paramètre p est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et vérifie:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \;\; k \geq 1.$$

1) Soit $k \geq 0$ un entier, calculer $\mathbb{P}(X \geq k + 1)$.

2) Soit $k \geq 1$ un entier, calculer $\mathbb{P}(\min(X, Y) \geq k)$ puis $\mathbb{P}(\min(X, Y) = k)$. En déduire que la loi de $Z = \min(X, Y)$ est encore une loi géométrique et donner son paramètre.

3) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère

$$f_n(x) = (1 + a \sin(2\pi n x))\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f_n soit une densité de probabilité.

2) On prend maintenant $a = 1$, et pour $n \geq 1$ on considère X_n une variable aléatoire de densité f_n. Calculer la fonction de répartition de X_n.

3) Montrer que X_n converge en loi et préciser la loi limite.

Exercice 3. Soient $a > 0, b > 0$ deux réels et soit $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} \leq 1\}$ le losange de base $[-a, a]$ et de hauteur $[-b, b]$.

On considère le vecteur aléatoire (X, Y) de loi uniforme sur le losange L.

1) Calculer l'aire de L puis donner la densité du couple (X, Y).

2) En déduire la probabilité $\mathbb{P}\left(\frac{|X|}{a} + \frac{|Y|}{b} \geq \frac{1}{2}\right)$.

3) Calculer la densité de probabilité de la loi marginale de X. En déduire celle de Y.

4) Calculer l'espérance et la variance de X.

5) Justifier que les variables X et Y sont non corrélées.

6) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Justifier.

Exercice 4. Soit $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \leq 1$ et soit

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer qur Γ est une matrice symétrique positive.

2) On considère (X_1, X_2) un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance Γ. On pose

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2) \text{ et } Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$$

3) Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes? Justifier.
4) Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 ont-elles la même loi? Justifier.
5) Donner la densité du couple (Y_1, Y_2).

Exercice 5. Le but de cet exercice est de démontrer une version de la loi forte des grands nombres dans le cas de variables aléatoires de carré intégrable. On n'utilisera donc pas la loi forte des grands nombres L^1.

On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $\mathcal{L}(X)$ la loi commune et on suppose que $E[X^2] < +\infty$. On note $\mu = E[X]$ et $\sigma^2 = Var(X)$. Soit $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On s'intéresse à $\frac{S_n}{n}$.

Pour $n \geq 1$, on pose $X'_n = X_n - \mu$ et on pose $S'_n = X'_1 + \cdots + X'_n$ et $Z_n = \frac{S'_n}{n}$.

1) Calculer $\mathbb{E}[Z_n]$ et $\mathrm{Var}(Z_n)$.
2) On considère la sous-suite d'entiers $(n^2)_{n\geq 1}$. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|Z_{n^2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n^2}.$$

3) En déduire la convergence presque sûre le long de la sous-suite d'entiers $(n^2)_{n\geq 1}$:

$$Z_{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0.$$

On va maintenant prouver la convergence presque sûre de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$.

4) Soit $n \geq 1$, on pose $m = [\sqrt{n}]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Montrer que $m^2 \leq n < (m+1)^2$ et que $n - m^2 \leq 2\sqrt{n}$.
5) On décompose alors Z_n sous la forme $Z_n = A_n + B_n$, avec

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m^2} X'_k \text{ et } B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=m^2+1}^{n} X'_k$$

Justifier que A_n converge presque sûrement vers 0.
6) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|B_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{(n - m^2)\sigma^2}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{2\sigma^2}{\varepsilon^2 n^{3/2}},$$

En déduire que B_n converge presque sûrement vers 0.
7) Conclure que Z_n converge presque sûrement vers 0, puis que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mu.$$

Exercice 6. (*Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling.*)

1) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire Z.

a) Montrer que si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $Y_n = f(Z_n)$ converge en loi vers $Y = f(Z)$.

b) On pose $Z_n^- = \max(0, -Z_n)$. En déduire que Z_n^- converge en loi vers Z^-.

2) On rappelle que la loi de Poisson est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

a) Calculer la fonction caractéristique de X pour X de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

b) En déduire l'espérance et la variance de X pour X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

c) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + \dots X_n$. En déduire la loi de S_n.

3) On pose $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $E[Z_n^2] = 1$. En déduire que si $a > 0$, $\mathbb{P}(Z_n^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}$.

4) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

5) Montrer que

$$E[Z_n^-] = \sqrt{n}e^{-n}\frac{n^n}{n!}.$$

6) Montrer que si Y est de loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$E[Y^-] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

7) On admet ici que $E[Z_n^-]$ converge vers $E[Z^-]$. En déduire la formule de Stirling:

$$n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Hors barême : (2 points)

(i) Donner un exemple de variables aléatoires telles que Z_n converge en loi vers Z mais telles que $E[Z_n^-]$ ne converge pas vers $E[Z^-]$.

(ii) Soit X une variable aléatoire positive de carré intégrable, montrer que

$$E\left[|X - \min(X,a)|\right] = E\left[(X-a)\mathbf{1}_{\{X\geq a\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}}\,\mathbb{P}(X\geq a)^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) En utilisant (3), en déduire que

$$E[Z_n^-] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E[Z^-].$$