Université de Bordeaux 1, L3 Probabilités, 2013-2014

PARTIEL - Lundi 10 Mars 2014

Aucun document n'est autorisé. Les 3 exercices sont indépendants.

EXERCICE 1.

Une personne envoie chaque jour son courrier électronique par l'intermédiaire de son ordinateur qui peut être connecté à 2 serveurs informatiques notés A et B. Sur un jour donné, un seul des deux serveurs est utilisé.

Soit $p \in]0,1[$ fixé. On suppose que la proportion d'utilisation du serveur A est p.
On note $q = 1 - p$.
Les choix des serveurs pour différents jours sont supposés indépendants. De plus, la proportion p reste constante.

A partir d'un jour fixé, appelé Jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple : la suite AABBBA... signifie que les jours 1 et 2, l'ordinateur a choisi le serveur A ; les jours 3, 4 et 5 l'ordinateur a choisi le serveur B ; et le jour 6 le serveur A.

On désigne par série une suite de lettres identiques.
On note L_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série. Ainsi, par exemple :

- pour la suite AABBBA ..., on a : $L_1 = 2$ et $L_2 = 3$,
- pour ABBA ..., on a : $L_1 = 1$ et $L_2 = 2$.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'évènement $A_k =$ "l'ordinateur a utilisé le serveur A le $k^{\text{ème}}$ jour".
Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'évènement $\{L_1 = i\}$ en fonction des évènements A_k.
En déduire la loi de L_1.

2) Montrer que pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbf{P}\big[\{L_1 = i\} \cap \{L_2 = j\}\big] = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j$.

3) a) Exprimer l'évènement $E =$ "les jours 2 et 3, l'ordinateur utilise deux serveurs différents" en fonction d'évènements faisant intervenir les variables L_1 et L_2.

En utilisant les questions **1)** et **2)** :

b) Calculer la probabilité de l'évènement E.

c) Montrer que $\mathbf{P}[L_1 = L_2] = \dfrac{pq}{1-pq}$.

d) Déterminer la loi de la variable L_2.

EXERCICE 2. Pour cet exercice, on pourra utiliser les rappels suivants sans démonstration :

Rappel 1 : Pour $a > 0$, $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$.

Rappel 2 : $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ pour tout $a > 0$.

Rappel 3 : Pour tous réels $a > 0$ et $\lambda > 0$, la fonction $f_{a,\lambda}(x) := \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}e^{-\lambda x}\,\mathbf{1}_{x>0}$ est une densité de probabilité (celle de la loi dite Loi Gamma de paramètres a et λ).

1) Soient $a > 0$ et $\lambda > 0$ deux réels. En utilisant ces rappels, démontrer que l'on a :

a) pour tout réel $b > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda^a\, x^{a+b-1} \exp(-\lambda x)\,dx = \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^b}$,

b) puis vérifier que l'intégrale précédente vaut $\frac{(a+b-1)!}{\lambda^b}$ si $a+b-1 \in \mathbb{N}^*$.

2) Fixons $\lambda > 0$. On considère X une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ayant pour densité de probabilité $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\,\mathbf{1}_{\{x>0\}}$.

a) Déterminer, en utilisant la question **1)**, les moments de tous ordres de X c'est-à-dire les espérances $\mathbf{E}(X^k)$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

b) On définit la variable Y en posant $Y = X^3$. Démontrer que Y admet pour densité de probabilité

$$f_Y(y) = \frac{\lambda}{3} y^{-2/3} \exp(-\lambda y^{1/3})\,\mathbf{1}_{\{y>0\}}.$$

c) Déterminer (de manière astucieuse) les moments de tous ordres de la variable Y.

3) On définit les fonctions h et f_Z par :

$$\forall z \in]0,+\infty[, \quad h(z) = \cos\Big(\frac{\pi}{6} + \lambda\sqrt{3}z^{1/3}\Big) \qquad \text{et} \qquad f_Z(z) = f_Y(z)(1 + h(z)).$$

On peut montrer **(ADMIS)** que la fonction h vérifie la propriété suivante :

$$(\star) \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} z^k\, h(z)\, f_Y(z)\,dz = 0.$$

a) Montrer que la fonction f_Z est une densité de probabilité.

b) Soit Z une variable aléatoire réelle admettant pour densité de probabilité f_Z.

i) Démontrer que les variables Y et Z ont les mêmes moments de tous ordres.

ii) Y et Z ont-elles la même loi ? Justifier.

EXERCICE 3.

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire continu à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ayant pour densité de probabilité :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2} e^{-x} \mathbf{1}_\Delta(x, y)$$

où Δ est le domaine de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } |y| < x\}.$$

1) a) Dessiner le domaine Δ.

b) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la variable $X^k Y$ est intégrable et centrée.

c) Les variables X et Y sont-elles corrélées ou non ? Justifier.

d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

2) a) Montrer que le couple $(U, V) = (X + 2Y, X - Y)$ admet pour densité :

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{3}(u+2v)} \mathbf{1}_{\Delta'}(u, v) \qquad \text{où} \quad \Delta' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > -v/2 \quad \text{et} \quad v > 0\}.$$

b) Déterminer la loi de la variable $V = X - Y$.