Exercice 3 :

1) X uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$ $\quad n \geq 2$.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} k \, \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \, \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$$

$$= \frac{(n+1)\left(4n+2 - 3(n+1)\right)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

$$= \frac{n^2-1}{12}.$$

2) Soit $Y \sim \mathrm{Ber}(p)$ indépendante de X.

On pose $W = XY$.

Y est à valeurs dans $\{0,1\}$, donc W est à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

et pour $1 \leq k \leq n$

$$\mathbb{P}(W=k) = \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=1\})$$
$$= \mathbb{P}(X=k)\ \mathbb{P}(Y=1)$$
$$= \frac{p}{n}.$$

$$\mathbb{P}(W=0) = \mathbb{P}(Y=0) = q = 1-p.$$

3) On a $E[W] = E[XY] = E[X]\ E[Y]$ par indépendance.

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right) \times p$$

$$E(W^2) = E[X^2 Y^2]$$
$$= E[X^2] E[Y^2] = p\, E[X^2]$$ car $Y^2 = Y$.

$$Var(W) = E[W^2] - E[W]^2$$
$$= p\, E[X^2] - p^2 E[X]^2.$$
$$= \frac{2p(n+1)(2n+1) - 3p^2(n+1)^2}{12}$$
$$= \frac{(n+1)\left(2p(2n+1) - 3p^2(n+1)\right)}{12}$$
$$= \frac{p(n+1)\left((4-3p)n + (2p-3p^2)\right)}{12}.$$

4) On pose $Z = X+Y$. Par linéarité :

$$E[Z] = E[X] + E[Y]$$
$$= \left(\frac{n+1}{2}\right) + p.$$

Par indépendance,

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{n^2-1}{12} + p(1-p).$$

5) $$\{Z=n\} = \left(\{X=n\} \cap \{Y=0\}\right) \cup \left(\{X=n-1\} \cap \{Y=1\}\right).$$

l'union est disjointe, par indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(X=n-1)\,\mathbb{P}(Y=1)$$
$$= \frac{1}{n}(1-p) + \frac{1}{n}p.$$
$$= \frac{1}{n}.$$

6) • $$\{W=0\} \cap \{Z=n\} = \{Y=0\} \cap \{X+Y=n\} = \{Y=0\} \cap \{X=n\}.$$

donc $\mathbb{P}(\{W=0\} \cap \{Z=n\}) = \mathbb{P}(Y=0) \times \mathbb{P}(X=n)$ (indépendance)
$$= (1-p) \times \frac{1}{n}.$$

• $\{W=1\} \cap \{Z=n\}$

$$= \{XY=1\} \cap \{X+Y=n\}$$
$$= \{X=1\} \cap \{Y=1\} \cap \{X+Y=n\}$$
$$= \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \geq 3 \\ \{X=1\} \cap \{Y=1\} & \text{si } n=2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\{W=1\} \cap \{Z=n\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 3 \\ \frac{1}{n} \times p & \text{si } n=2. \end{cases}$$

Or $\mathbb{P}(W=1)\ \mathbb{P}(Z=n)$

$$= \frac{p}{n} \times \frac{1}{n} \qquad \neq \mathbb{P}(\{W=1\} \cap \{Z=n\})$$

donc W et Z ne sont pas indépendantes.

7) $\mathrm{Cov}(W,Z) = \mathrm{Cov}(XY, X+Y)$

$$= \mathbb{E}[(XY)(X+Y)] - \mathbb{E}[XY]\,\mathbb{E}(X+Y)$$

$$= \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]\,(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])$$

indépendance et linéarité

$$= \left(\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\right)\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\left(\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2\right)$$

$$= \mathrm{Var}(X)\,\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\,\mathrm{Var}(Y).$$

Exercice 4 :

1) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

donc pour $c = \frac{2}{\pi}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est mesurable, ≥ 0 et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

donc est la densité d'une certaine variable aléatoire.

2) Soit X de densité f.

avec probabilité 1, $X > 0$, donc $Y = \frac{1}{X}$

est presque sûrement défini à valeurs dans $(0, +\infty)$.

Soit $t > 0$.

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq t\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{t} \leq X\right)$$
$$= \int_{1/t}^{+\infty} f_X(u)\,du = \int_{1/t}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ 12

et $F_Y(t) = 0$ si $t \leq 0$.

Si $t \neq 0$, la fonction de répartition de Y est dérivable,

et $F_Y'(t) = 0$ si $t < 0$

$$F_Y'(t) = -\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \times \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+t^2}. \quad \text{si } t>0.$$

On vérifie qu'on a bien :

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+u^2}\,\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}\,du \quad \text{pour } t\in\mathbb{R}.$$

donc Y est à densité, de densité h.

donc Y a la même loi que X.

X et $1/X$ ont la même loi !

Rq : On a remarqué que pour tout $t>0$

$$\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

3) X est ≥ 0

donc $\underset{E[|X|]}{\overset{\shortparallel}{E[X]}} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{x}{1+x^2}\,dx = +\infty$.

$$\left(\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{x}\right)$$

X n'est donc pas intégrable. Son espérance n'est pas définie.