2017

Corrigé DST L3 Proba

Exercice 1 :

0) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ indépendance

$= p + r - pr$

$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A})\,\mathbb{P}(\bar{B})$ indépendance

$= (1 - \mathbb{P}(A))\,(1 - \mathbb{P}(B))$

$= qs$

1) Soit X et Y indépendants avec X de loi $\mathcal{G}(p)$ et Y de loi $\mathcal{G}(r)$.

Soit $k \geq 0$.

$$\mathbb{P}(X \geq k+1) = \sum_{j \geq k+1} \mathbb{P}(X = j)$$

$$= \sum_{j \geq k+1} q^{j-1} p = \left(\sum_{j \geq k} q^j \right) p$$

$$= q^k \times \frac{1}{1-q} p = q^k.$$

2) Soit $k \geq 1$.

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) \geq k) = \mathbb{P}(\{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\})$$

$$= \mathbb{P}(X \geq k)\, \mathbb{P}(Y \geq k)$$

(indépendance)

$$= q^{k-1} s^{k-1} \qquad \text{(d'après 1).}$$
$$= (qs)^{k-1}.$$

et $\mathbb{P}(\min(X,Y)=k) = \mathbb{P}(\min(X,Y)\geq k) - \mathbb{P}(\min(X,Y)\geq k+1)$

$$= (qs)^{k-1} - (qs)^{k}$$
$$= (qs)^{k-1}(1-qs)$$

d'où $\min(X,Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $1-qs = p+r-pr$.

3) Par la formule de probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=k\})$$
$$= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=k) \qquad \text{indépendance}$$
$$= \sum_{k\geq 1} q^{k-1} p\, s^{k-1} r$$
$$= pr \sum_{k\geq 0} (qs)^k$$
$$= \frac{pr}{1-qs} = \frac{pr}{p+r-pr}$$

$$= \left[u - \frac{\cos(2\pi n u)}{2\pi n} \right]_0^t$$

$$= t + \left(\frac{1 - \cos(2\pi n) t}{2\pi n} \right)$$

3) $$\left| \frac{1-\cos(2\pi n t)}{2\pi n} \right| \leq \frac{1}{\pi n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $F_n(t)$ converge vers (simplement) lorsque $n \to +\infty$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

Il s'agit de la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U$ avec U de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 2 :

1) f_n est une densité si et seulement si

f_n est mesurable, positive et $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$.

$$\int_0^1 \sin(2\pi n x)\,dx = \left[-\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\right]_0^1 = 0.$$

donc f_n est mesurable et d'intégrale 1.

Sur $[0,1]$, pour $n \geq 1$, $\sin(2\pi n x)$ atteint les valeurs $+1$ et -1.

donc $1 + a\sin(2\pi n x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$

équivaut à : $|a| \leq 1$.

donc f_n est une densité si et seulement si $|a| \leq 1$.

2) Soit $a = 1$. et X_n de densité f_n.

Sa fonction de répartition vaut donc :

$$F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et pour $0 \leq t \leq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n \leq t) = \int_0^t f_n(u)\,du$$