

# Schéma de Talezer - une discussion

Marc Duruflé

September 13, 2006

## 1 Ecriture du schéma

La technique de Talezer [Tal-Ezer, 1986] s'applique à la résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{dU}{dt} = AU + F(t)$$

$$U(t = 0) = U^0$$

où  $A$  est une matrice,  $F(t)$  est une source dépendant du temps connue,  $U(t)$  est le vecteur inconnu,  $U^0$  la condition initiale. La solution analytique de ce problème est égale à :

$$U(t) = e^{tA}U^0 + \int_0^t e^{\tau A}F(t - \tau)d\tau$$

Malheureusement, le calcul d'une exponentielle de matrice est extrêmement coûteux, Hillel Talezer propose alors d'utiliser le développement de Jacobi-Anger :

$$e^{ikR \cos \theta} = \sum_k \varepsilon_n i^n J_n(kR) \cos(n\theta)$$

avec  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_n = 2$ ,  $n \geq 1$ .

On note :

$$z = i \cos \theta$$

et les polynomes :

$$Q_n(z) = i^n \cos(n\theta)$$

Les polynomes de Chebycheff  $\cos(n\theta)$  vérifient la relation de recurrence :

$$\cos((n+1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

En multipliant par  $i^{n+1}$ , on trouve :

$$i^{n+1} \cos((n+1)\theta) = 2i \cos \theta i^n \cos(n\theta) + i^{n-1} \cos((n-1)\theta)$$

Soit :

$$Q_{n+1}(z) = 2zQ_n + Q_{n-1}$$

On choisit  $k = t$ ,  $z = \frac{A}{R}$ , on a alors le développement suivant :

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^K \varepsilon_n J_n(tR) Q_n\left(\frac{A}{R}\right)$$

On se place dans le cas d'une source à variable séparées :

$$F(t) = h(t)G$$

où  $h$  est une fonction scalaire et  $G$  un vecteur indépendant du temps. Le calcul du terme source s'explique ;

$$\int_0^t e^{\tau A} F(t-\tau) d\tau = \sum_n \int_0^t \varepsilon_n J_n(\tau R) h(t-\tau) Q_n\left(\frac{A}{R}\right) G d\tau$$

On note alors les coefficients  $b_n$  :

$$b_n = \int_0^t \varepsilon_n J_n(\tau R) h(t-\tau) d\tau$$

La somme devient :

$$\int_0^t e^{\tau A} F(t-\tau) d\tau = \sum_{n=0}^K b_n Q_n\left(\frac{A}{R}\right) G$$

En conclusion, le schéma proposé par Talezer s'écrit :

$$U^{n+1} = \sum_{k=0}^K \varepsilon_k J_k(\delta t R) Q_k\left(\frac{A}{R}\right) U^n + \sum_{k=0}^K b_k Q_k\left(\frac{A}{R}\right) G$$

avec  $Q_k$  qui vérifie la relation de récurrence :

$$Q_{k+1} = 2\frac{A}{R}Q_k + Q_{k-1}, \quad Q_0 = I, \quad Q_1 = \frac{A}{R}$$

et les coefficients  $b_k$  ;

$$b_k = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \varepsilon_k J_k(\tau R) h((n+1)\Delta t - \tau) d\tau$$

## 2 Compléments sur le schéma

Une première question qui vient à l'esprit est le choix de  $R$ . Si on choisit une matrice  $A$  anti-symétrique, les valeurs propres sont imaginaires pures. On note  $\hat{A}$  le symbole de  $A$ , on a alors :

$$\hat{A} = i\alpha$$

avec  $\alpha$  réel. On a alors la relation :

$$\frac{\hat{A}}{R} = i \frac{\alpha}{R} = i \cos \theta$$

Afin d'obtenir un angle  $\theta$  réel, on doit avoir la condition :

$$R \geq \alpha$$

. On choisit donc pour  $R$ , la valeur suivante :

$$R = |\lambda_{\max}|$$

Une deuxième question est le calcul des coefficients  $b_k$ .  $h$  étant une simple fonction scalaire, on a fait le choix d'évaluer les intégrales à l'aide de  $P$  points de Gauss, avec :

$$P = 3K$$

En pratique, le calcul de ces coefficients est négligeable par rapport aux produits matrice vecteur avec  $A$ .

Une troisième question concerne le choix de  $K$  et la stabilité de ce schéma. On doit tronquer l'expansion de Jacobi-Anger, avec un argument  $\Delta t R$ . ce sujet a été largement traité par [Carayol et Collino, 2004], qui donne l'équivalent suivant :

$$(1) \quad K = \Delta t R + \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} W_0 \left( \frac{2}{3\pi\varepsilon^2} \right) \right]^{\frac{2}{3}} (\Delta t R)^{\frac{1}{3}}$$

avec  $W_0$  la fonction de Lambert et  $\varepsilon$  l'erreur de troncature qu'on veut atteindre.  $\varepsilon$  est l'erreur de troncature après une itération. L'erreur globale due au schéma est alors égale à :

$$\text{Erreur globale} = \frac{T}{\Delta t} \varepsilon$$

On vérifie l'adéquation de cette erreur estimée avec l'erreur obtenue numériquement sur la figure 1. Sur ce cas-test, on a constaté que pour  $K \leq 95$ , le schéma était exponentiellement instable. On observe une stabilité à partir de  $K = 96$ . Il faudrait effectuer une analyse de stabilité au niveau théorique. Talezer avance comme principal argument que si on garantit une grande précision pour l'évaluation de  $U^{n+1}$  à partir de la connaissance de  $U^n$ , on devrait avoir la stabilité en conséquence. Pour  $K \geq 120$ , on observe une stabilisation de l'erreur numérique due aux erreurs d'arrondi (l'erreur est de l'ordre de l'erreur machine).

Une quatrième question est la complexité de ce schéma. Est-il intéressant d'utiliser des ordres très élevés ? Quelle est la complexité de ce schéma par rapport à un schéma saute-mouton classique ? D'abord on remarquera que calculer la somme :

$$\sum_{k=0}^K \varepsilon_k J_k(\delta t R) Q_k\left(\frac{A}{R}\right) U^n$$

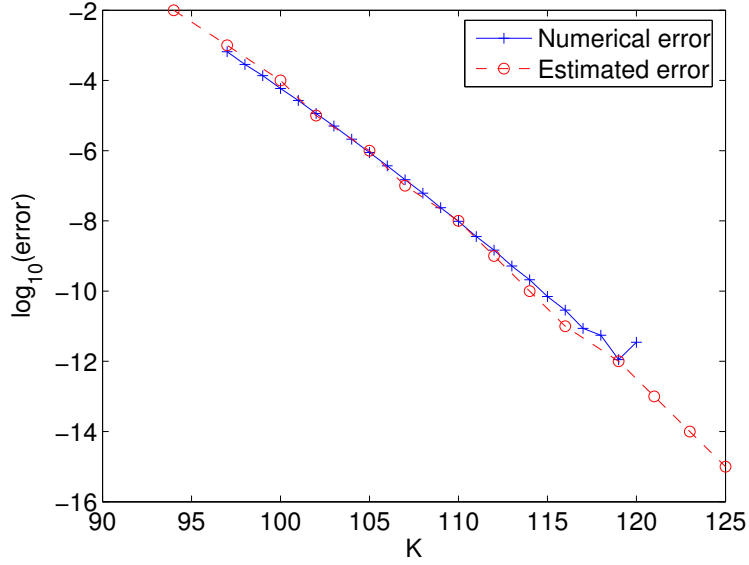


Figure 1: Erreur numérique en fonction de  $K$ , sur le cas 2-D du disque diélectrique avec des couches PML. Comparaison avec une estimation d'erreur utilisant l'asymptotique de F. Collino.

nécessite d'évaluer  $K$  produits matrice-vecteur  $Y = AX$ . Les autres opérations sont négligeables (additions de vecteurs). Lorsque la source  $h(t)$  est non-nulle, on a une somme similaire à évaluer, ce qui rajouterait  $K$  produits matrice-vecteur supplémentaires. On suppose que la source est d'une durée assez courte (typiquement un Ricker), pour négliger ce coût. Au niveau du stockage, les vecteurs  $Q_k(\frac{\Delta}{R})U^n$  sont calculés par une formule de récurrence à trois niveaux, on a donc besoin de ne stocker que  $Q_{n-1}$  et  $Q_n$ , le résultat du produit matrice-vecteur  $Y = \frac{\Delta}{R}Q_n$ , et l'itéré  $U^n$ . Le coût de stockage est donc de quatre vecteurs. Si on considère une matrice antisymétrique  $A$ , le schéma saute-mouton classique s'écrit :

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t A U^n$$

Le coût d'une itération saute-mouton est donc d'un produit matrice-vecteur, et le coût de stockage est de 3 vecteurs ( $U^{n-1}, U^n, A U^n$ ). Or la CFL du schéma saute-mouton est de :

$$\Delta t = \frac{1}{\lambda_{max}} = \frac{1}{R}$$

Pour le schéma d'ordre  $K$ , on se fixe un pas de temps  $\Delta t$ , et on trouve l'ordre  $K$  de la formule 1, dont le terme principal vaut :

$$K = \Delta t R \Leftrightarrow \Delta t = \frac{K}{R}$$

On remarque qu'on a un pas de temps  $K$  fois plus élevé que pour le schéma saute-mouton.

En conclusion, le schéma saute-mouton et le schéma de Talezer ont une complexité équivalente ( $K$  produits matrice-vecteur pour avancer de  $\frac{K}{\Delta t}$ ), et un coût de stockage proche (3 vecteurs pour le

saute-mouton contre 4 pour le schéma de Talezer). Le premier avantage du schéma de Talezer est sa grande précision, on atteint rapidement la précision machine lorsqu'on augmente  $K$ . Le second avantage est qu'il s'applique à des matrices générales, alors que si on veut utiliser un schéma saute-mouton avec une matrice non-antisymétrique, il faut adapter le schéma pour obtenir la stabilité. On voit deux inconvénients au schéma de Talezer. Le premier inconvénient est que les pas de temps sont souvent assez énormes. Sur le cas-test du disque diélectrique, on a un pas  $\Delta t = 0.5$  (la période est de 1s), ce qui n'est pas très pratique si on veut réaliser un film, ou avoir des séismogrammes avec beaucoup de temps intermédiaires. Le second inconvénient est qu'il s'applique difficilement au cas d'une source qui n'est pas à variables séparées en espace et en temps.

### 3 Application aux équations de Maxwell 2-D

#### 3.1 Rappel des équations

Dans le cas 2-D, les équations de Maxwell sont équivalentes à l'équation de l'acoustique. Dans le domaine physique, on résout les équations :

$$(2) \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\vec{v}) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ \mu^{-1} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla} u &= 0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Dans le domaine PML, on résout Le système :

$$(3) \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\vec{v}) - \sum_{k=1}^d \vec{v}^\diamond \cdot \vec{e}_k &= 0 \quad \text{dans } \Omega_{pml} \\ \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + \mathcal{T} \vec{v}^* &= \vec{\nabla} u \quad \text{dans } \Omega_{pml} \\ \frac{\partial \vec{v}^\diamond}{\partial t} + \mathcal{T} \vec{v}^\diamond &= \mathcal{T}' \vec{v} \quad \text{dans } \Omega_{pml} \\ \mu^{-1} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu^{-1} \mathcal{T} \vec{v} &= \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega_{pml} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_{pml} \end{aligned}$$

Les fonctions  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  sont respectivement l'amortissement et la dérivée de l'amortissement. Après discrétisation spatiale, on aboutit au système différentiel suivant dans le domaine physique :

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= A^1 V + F \\ \frac{dV}{dt} &= A^2 U \end{aligned}$$

et dans la PML

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{dt} &= A^1 V + S_h V^\diamond \\
 \frac{dV^*}{dt} &= T_h V^* + A^2 U \\
 \frac{dV^\diamond}{dt} &= T_h V^\diamond + T'_h V \\
 \frac{dV}{dt} &= T_h V + B_h \frac{dV^*}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

## 3.2 Rappel des schémas alternatifs

### 3.2.1 Schéma saute-mouton d'ordre deux

Il s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} &= A^1 V^{n+1/2} + S_h V^{\diamond n+1/2} \\
 \frac{V^{*n+3/2} - V^{*n+1/2}}{\Delta t} &= T_h \frac{V^{*n+3/2} + V^{*n+1/2}}{2} + A^2 U^{n+1} \\
 \frac{V^{\diamond n+3/2} - V^{\diamond n+1/2}}{\Delta t} &= T_h \frac{V^{\diamond n+3/2} + V^{\diamond n+1/2}}{2} + T'_h \frac{V^{n+3/2} + V^{n+1/2}}{2} \\
 \frac{V^{n+3/2} - V^{n+1/2}}{\Delta t} &= T_h \frac{V^{n+3/2} + V^{n+1/2}}{2} + B_h \frac{V^{*n+3/2} - V^{*n+1/2}}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

On remarquera qu'on a des indices  $n+1$  pour l'inconnue  $U$  et  $n+1/2$  pour l'inconnue  $V$ .

### 3.2.2 Equation modifiée

Cette technique consiste à expliciter l'erreur d'ordre deux sur chaque terme :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{dU}{dt} + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{d^3 U}{dt^3} + O(\Delta t^4)
 \tag{6}$$

$$\frac{V^{n+3/2} + V^{n+1/2}}{2} = V + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{d^2 V}{dt^2} + O(\Delta t^4)
 \tag{7}$$

On rajoute les termes correctifs  $\frac{\Delta t^2}{24} \frac{d^3 U}{dt^3}$  ou  $\frac{\Delta t^2}{8} \frac{d^2 V}{dt^2}$  dans le schéma d'ordre deux, pour obtenir un schéma d'ordre 4. Pour évaluer ces termes correctifs, on réutilise le système, afin d'exprimer  $\frac{d^3 U}{dt^3}$  en fonction de  $U, V, V^*, V^\diamond$ . Les détails de ce schéma sont écrits dans [~durufle/LATEX/ModifiedEquation.pdf](#)

### 3.2.3 Schéma de Runge-Kutta

Sur l'équation ;

$$\frac{dX}{dt} = BX + F(t) = G(t, X)$$

Le schéma Runge-Kutta d'ordre 4 classique s'écrit :

$$\begin{aligned} k_1 &= G(t_n, X^n) \\ k_2 &= G\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, X^n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) \\ k_3 &= G\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, X^n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) \\ k_4 &= G(t_n + \Delta t, X^n + \Delta tk_3) \\ X^{n+1} &= X^n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Dans notre cas, l'opérateur  $B$  est linéaire, on a alors l'équivalence entre ce schéma et le schéma utilisant directement la série de Taylor (dans le cas  $F = 0$ ):

$$X^{n+1} = X^n + \Delta t BX^n + \frac{\Delta t^2}{2} B^2 X^n + \frac{\Delta t^3}{6} B^3 X^n + \frac{\Delta t^4}{24} B^4 X^n$$

### 3.3 Comparaison dans le cas du disque diélectrique

On considère la propagation d'une gaussienne en espace modulée par un Ricker en temps dans un milieu homogène contenant un disque diélectrique. La solution obtenue est affichée sur la figure 2. En ayant fixé la discrétisation spatiale, on veut atteindre une erreur inférieure à 5 % pour différents schémas d'ordre élevé. L'erreur est une erreur  $L^2$  sur le dernier instantané ( $t = 192s$ ). On obtient les résultats du tableau 1 Sur ce cas-test, on voit que le schéma de Talezer n'est pas

Type de schéma	Pas de temps $\Delta t$	Erreur	Nombre produits
Saute-mouton	$\Delta t = 0.005 s$	3.28 %	40 000
Equation modifiée	$\Delta t = 0.038 s$	0.178 %	15 800
Runge-Kutta	$\Delta t = 0.02 s$	0.208 %	40 000
Talezer(29)	$\Delta t = 0.1 s$	0.131 %	58 000
Talezer(47)	$\Delta t = 0.2 s$	0.103%	47 000
Talezer(96)	$\Delta t = 0.5 s$	0.13 %	38 400
Talezer(196)	$\Delta t = 1 s$	8.83e-10	39 200

Table 1: Comparaison de différents schémas en temps dans le cas du disque diélectrique

plus rapide que le schéma d'ordre deux mais il est plus précis. En outre, le schéma d'ordre utilise le décalage d'indices  $(n + 1, n + 1/2)$  pour les deux inconnues  $u$  et  $v$ , décalage qui n'est pas dans

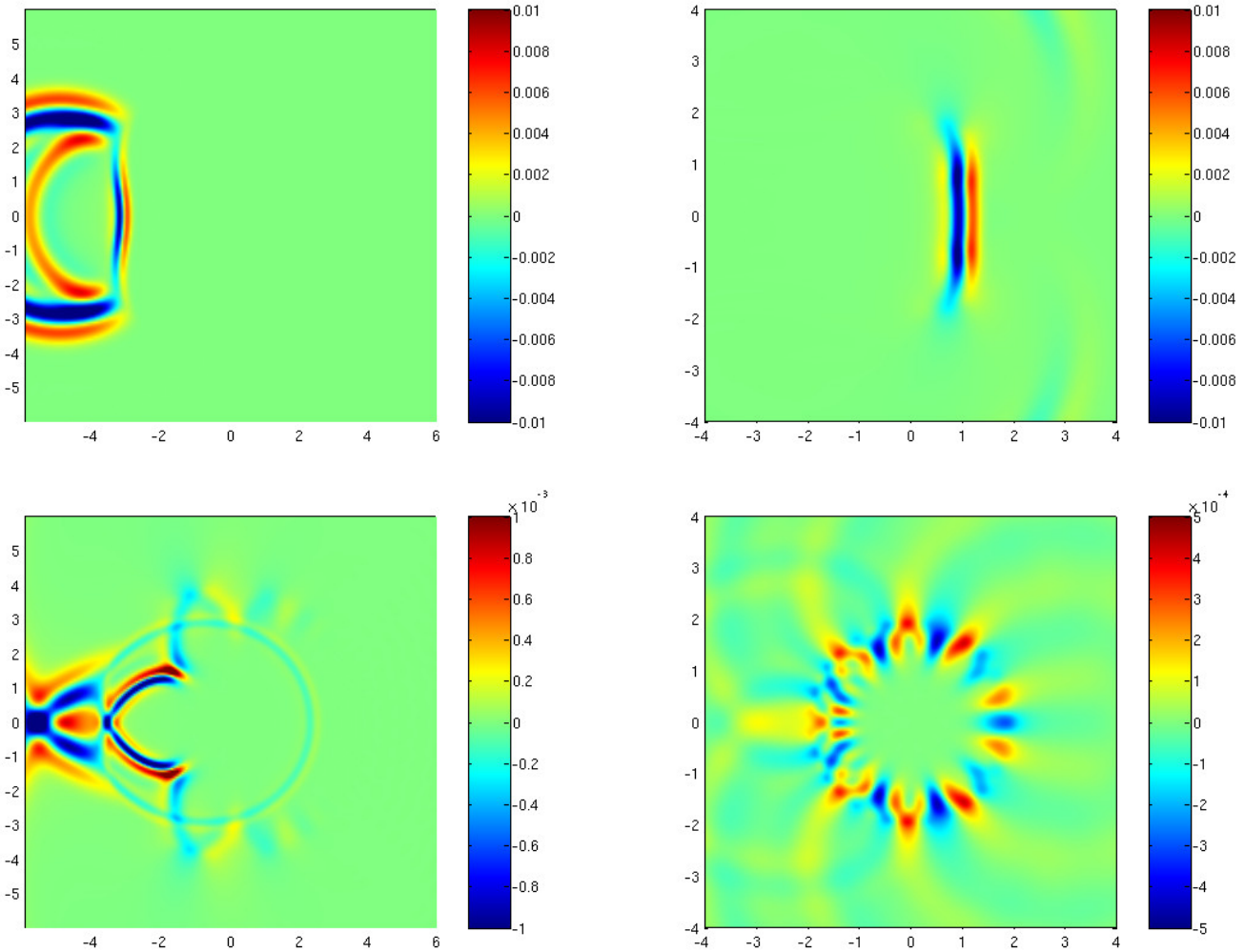


Figure 2: Solution à  $t = 4s$ ,  $t = 8s$ ,  $t = 96s$  et  $t = 192s$

le schéma saute-mouton standard, décrit dans la première section. Si on utilise un schéma saute-mouton classique, on devrait avoir 80 000 produits. Le schéma basé sur la technique de l'équation modifiée est le plus rapide, mais ça reste un schéma d'ordre 4 (a priori moins efficace que le schéma de Talezer, si on veut une très grande précision) et difficile à manipuler lorsqu'on veut rajouter des termes au système différentiel à résoudre.

Lorsqu'on utilise des pas de temps de plus en plus grands, on est amené à prendre un  $K$  très élevé pour les schémas de Talezer. On rencontre alors des problèmes de stabilité. Pour  $\Delta t = 1.0$ , on a été obligé de choisir  $K = 196$  afin d'être stable alors que  $K = 176$  aurait du suffire pour avoir une erreur inférieure à 1 %. Pour  $\Delta t = 2s$ , nous ne sommes pas arrivés à trouver un  $K$  qui assure la stabilité. Nous pensons que lorsque  $K$  devient trop élevé (supérieur à 200), on arrive pas à obtenir la stabilité. Nous avons des problèmes de stabilité dans le cas d'une absorption (condition absorbante, PML, milieu dissipatif ...). Dans le cas non-absorbant (la matrice est alors antisymétrique, et les



valeurs propres sont purement imaginaires), on n'a jamais observé d'instabilité.

## 4 Application aux équations de Maxwell 3-D

### 4.1 Rappel des équations

Dans le domaine physique, les champs  $E$  et  $H$  vérifient :

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times H &= F \\ \mu \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E &= 0\end{aligned}$$

Dans le domaine PML, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial E^*}{\partial t} + \varepsilon \mathcal{T}_{2,3,1} E^* - \nabla \times H &= 0 \\ \mu \frac{\partial H^*}{\partial t} + \mu \mathcal{T}_{2,3,1} H^* + \nabla \times E &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \mathcal{T}_{3,1,2} E &= \frac{\partial E^*}{\partial t} + \mathcal{T}_{1,2,3} E^* \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \mathcal{T}_{3,1,2} H &= \frac{\partial H^*}{\partial t} + \mathcal{T}_{1,2,3} H^*\end{aligned}$$

Le tenseur  $\mathcal{T}$  représente l'amortissement dans la PML. On discrétise ces équations à l'aide d'une méthode de Galerkin discontinue [Pernet, 2004].

### 4.2 Comparaison dans le cas d'une cavité

On considère la propagation d'une gaussienne en espace modulée par un Ricker en temps dans une cavité cubique. La solution obtenue est affichée sur la figure 3. En ayant fixé la discrétisation spatiale, on veut atteindre une erreur inférieure à 5 % pour différents schémas d'ordre élevé. L'erreur est une erreur  $L^2$  sur le dernier instantané ( $t = 198s$ ). On obtient les résultats du tableau 2.

### 4.3 Comparaison dans le cas d'une sphère diélectrique

On considère la propagation d'une gaussienne en espace modulée par un Ricker en temps dans un milieu homogène contenant une sphère diélectrique. Le domaine de calcul est entouré par des couches PML, c'est donc un problème extérieur, contrairement au précédent cas-test de la cavité. La solution obtenue est affichée sur la figure 4. En ayant fixé la discrétisation spatiale, on veut atteindre une erreur inférieure à 5 % pour différents schémas d'ordre élevé. L'erreur est une erreur  $L^2$  sur le dernier instantané ( $t = 198s$ ). On obtient les résultats du tableau 3

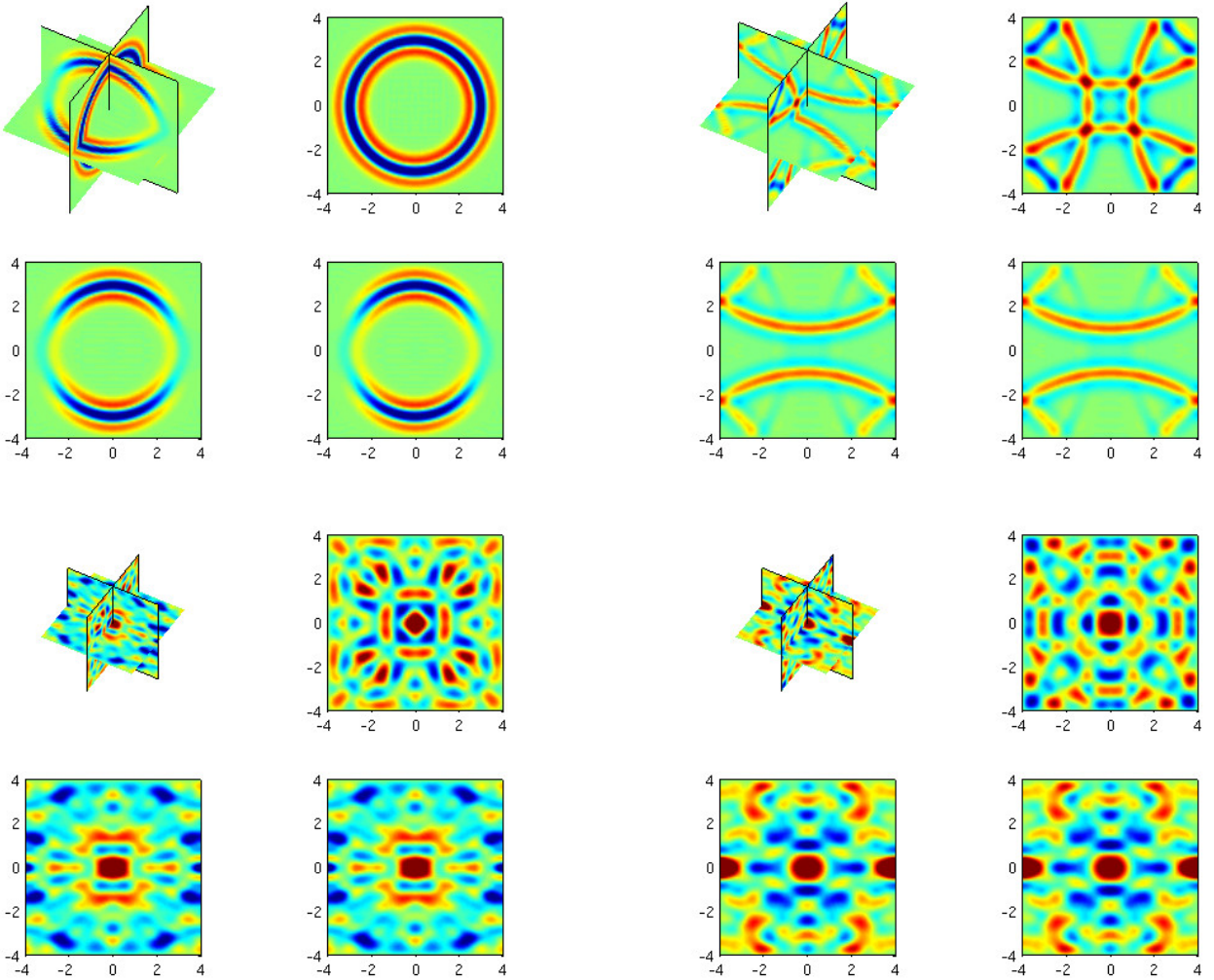


Figure 3: Solution à  $t = 4s$ ,  $t = 8s$ ,  $t = 99s$  et  $t = 198s$

Type de schéma	Pas de temps	Erreur	Nombre produits
Saute-mouton	$\Delta t = 0.004s$	2.90 %	50 000
Equation modifiée	$\Delta t = 0.07s$	4.77 %	8 600
Runge-Kutta	$\Delta t = 0.034s$	3.39 %	23 500
Talezer(19)	$\Delta t = 0.1s$	0.28 %	38 000
Talezer(30)	$\Delta t = 0.2s$	6.28e-4	30 000
Talezer(58)	$\Delta t = 0.5s$	5.02e-4	23 200
Talezer(104)	$\Delta t = 1s$	7.83e-5	20 800

Table 2: Comparaison de différents schémas en temps dans le cas d'une cavité

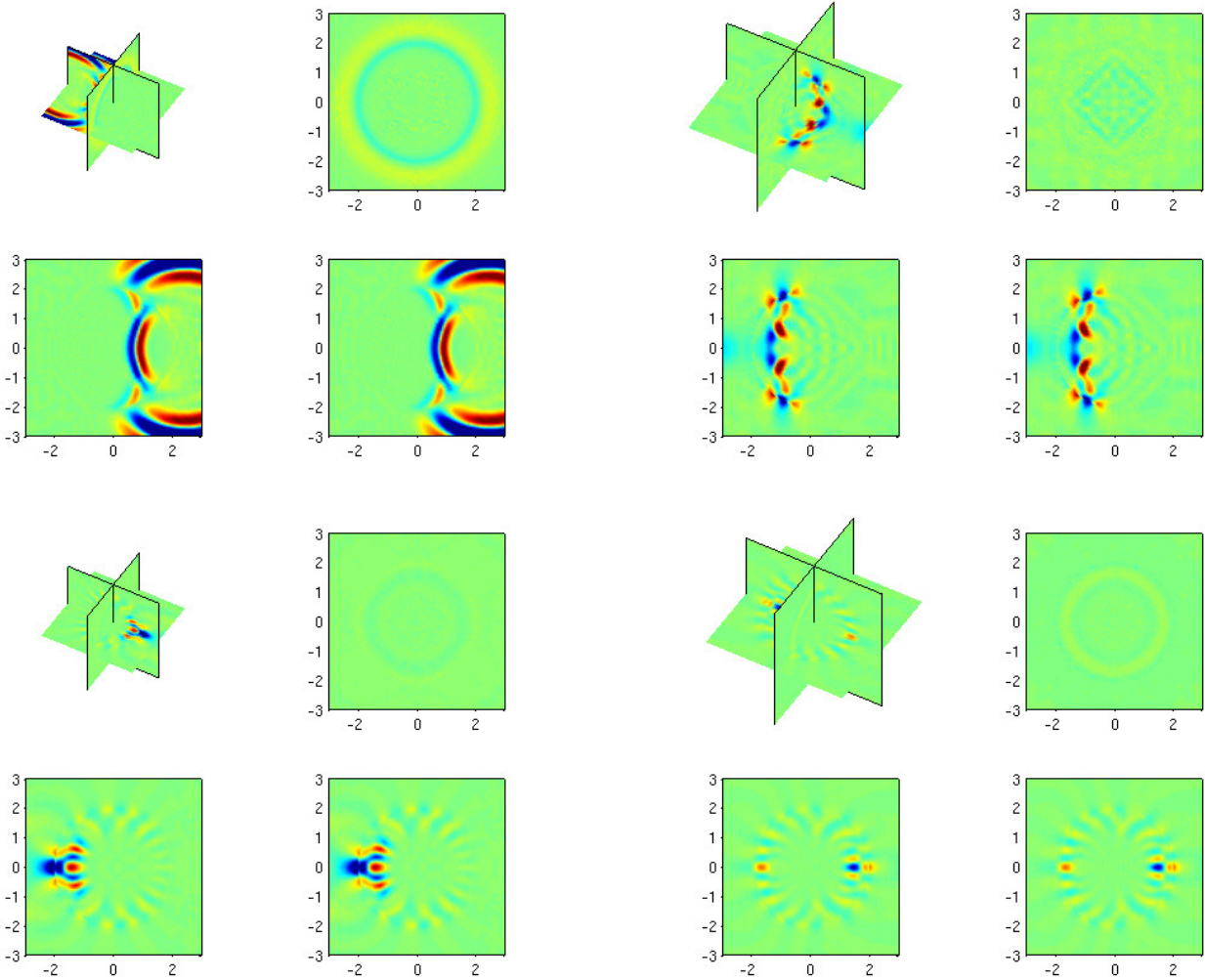


Figure 4: Solution à  $t = 4s$ ,  $t = 8s$ ,  $t = 96s$  et  $t = 198s$

Type de schéma	Pas de temps $\Delta t$	Erreur	Nombre produits
Saute-mouton	0.005 s	4.52 %	40 000
Equation modifiée	-	- %	-
Runge-Kutta	$\Delta t = 0.018s$	0.132 %	44 400
Talezer(29)	$\Delta t = 0.1s$	0.191 %	58 000
Talezer(47)	$\Delta t = 0.2s$	0.166 %	47 000
Talezer(100)	$\Delta t = 0.5s$	8.59e-5	40 000

Table 3: Comparaison de différents schémas en temps dans le cas d'une cavité

## 5 Application à l'aéroacoustique

### 5.1 Rappel des équations

Pour un écoulement constant, on a :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = F(t)$$

où  $U$  peut être décomposé :

$$U = (p, v_x, v_y, v_z)$$

En 3-D, les matrices  $A_i$  sont égales à :

$$A_0 = \begin{pmatrix} M_0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & M_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} M_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

L'écoulement est dirigé suivant le vecteur  $M = (M_0, M_1, M_2)$ .

### 5.2 Comparaison dans le cas d'une condition périodique

On considère un domaine carré avec une condition de Neumann sur les bords  $y = -5$  et  $y = 5$ , et une condition de périodicité entre les bords  $x = -5$  et  $x = 5$ . On affiche quelques instantanés de la solution sur la figure 5. Dans le cas de l'aéroacoustique, on ne peut pas séparer la série

Type de schéma	Pas de temps $\Delta t$	Erreur	Nombre produits
Saute-mouton	$\Delta t = 0.0025 s$	4.08 %	80 000
Equation modifiée	$\Delta t = 0.0195 s$	0.349 %	30 800
Runge-Kutta	$\Delta t = 0.0192 s$	0.321 %	41 700
Talezer(29)	$\Delta t = 0.1 s$	0.120 %	58 000
Talezer(47)	$\Delta t = 0.2 s$	0.098%	47 000
Talezer(96)	$\Delta t = 0.5 s$	0.125%	38 400
Talezer(176)	$\Delta t = 1 s$	0.073 %	35 200

Table 4: Comparaison de différents schémas en temps dans le cas de l'aéroacoustique

$U_0, U_2, U_4...$  de la série  $U_1, U_3, U_5...$  comme dans les cas précédents. La technique de l'équation modifiée n'est alors pas si avantageuse. Les schémas de Talezer sont d'une complexité proche à celle de l'équation modifiée.

## References

CARAYOL, Q. et COLLINO, F. (2004). Error estimates in the Fast Multipole Method for scattering problems. Part 1: truncation of the Jacobi-Anger series. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(2):371–394.

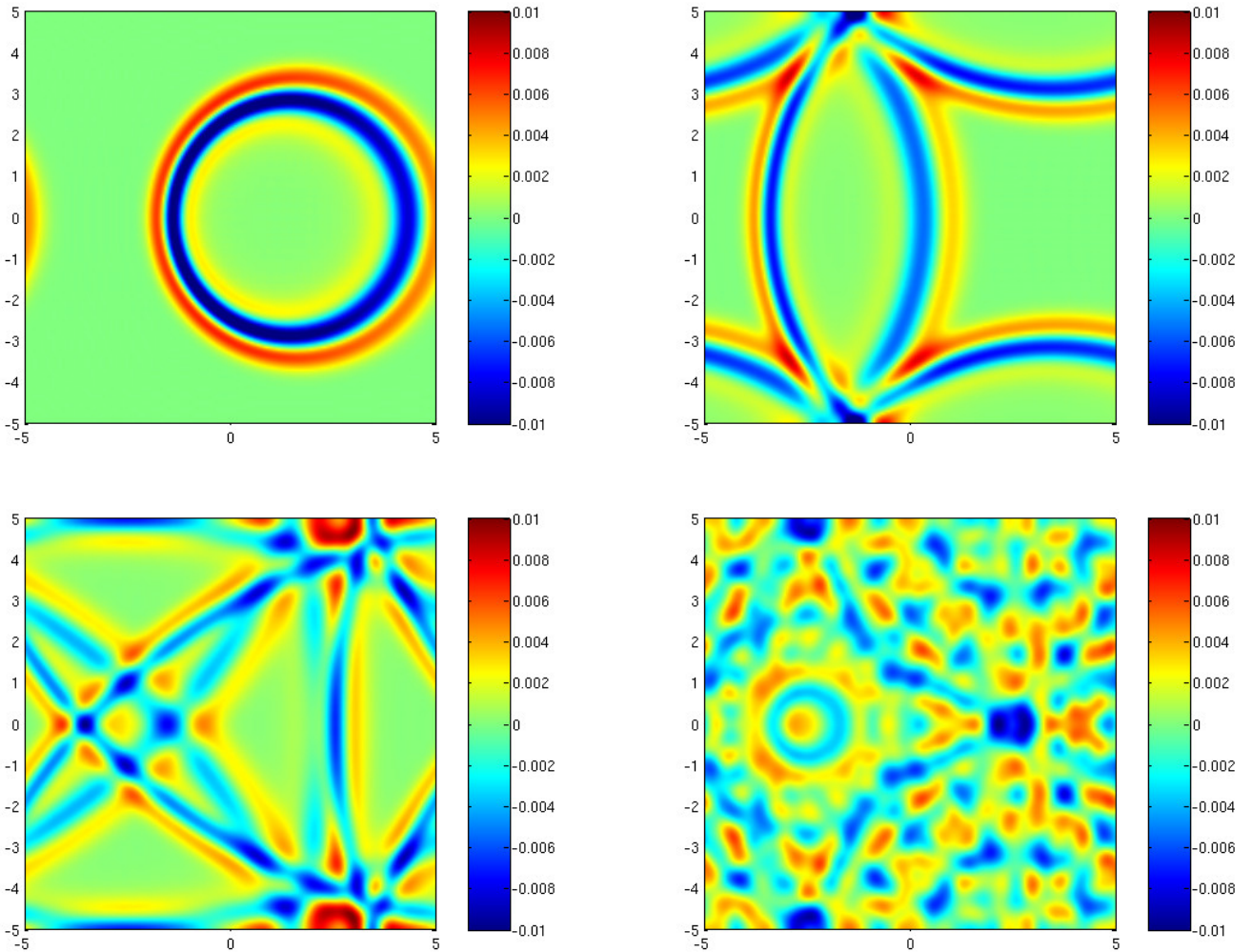


Figure 5: Solution à  $t = 4s$ ,  $t = 8s$ ,  $t = 16s$  et  $t = 196s$

PERNET, S. (2004). *Etude de méthodes d'ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Application à la détection et à la compatibilité électromagnétique.* Thèse de doctorat, Université de Paris IX Dauphine.

TAL-EZER, H. (1986). Spectral methods in time for hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23(1):11–26.