Feuille 3. Idéaux (suite). Anneaux quotients. Anneaux des polyômes.

EXERCICE 1. Soit A un anneau.

1)i) Soit I un idéal de A. Montrer que A/I est intègre (résp. un corps) si et seulement si I est premier (résp. maximal).

ii) L'idéal (X) de $\mathbb{Z}[X]$ est-il premier? maximal?

2) Montrer que le nilradical de $A/r(A)$ est $\{0\}$ i.e. que $r(A/r(A)) = \{0\}$.

EXERCICE 2. Soit A un anneau. On note $Spec(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. Pour I idéal de A on note

$$V(I) := \{P \in Spec(A), I \subseteq P\}.$$

1) Montrer que $V(A) = Spec(A)$.

2) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

EXERCICE 3. Soit A un anneau intègre. Montrer que le noyau du morphisme

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & A \\ n & \mapsto & n.1_A \end{array}$$

est de la forme $p\mathbb{Z}$ pour p premier ou bien est (0). En déduire $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou bien $\mathbb{Z}$ s'injecte dans A.

En déduire qu' un corps contient soit un corps fini, soit un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

EXERCICE 4. Soit A un anneau.

i) Si A est intègre, montrer que $A[X]^* = A^*$.

ii)Donner un contre-exemple sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$

iii) Dans le cas général, montrer que

$$A[X]^* = \{f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in A[X] \mid a_0 \in A^* \text{ et } a_i \in r(A),\ i \geq 1\}.$$

On pourra commencer par montrer que si $P(X)Q(X) = 1$ avec $P(X) = \sum_{k=0^n} a_kX^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0^m} b_kX^k$, alors a_0 et b_0 sont inversibles puis que pour tout $0 \leq k \leq n$, $a_n^{k+1}b_{m-k} = 0$.

EXERCICE 5. Quels sont les idéaux de l'anneau

$$\mathbb{F}_3[X]/(X^2(X+1)) \ ?$$

Donner également les inclusions entre ces idéaux.

(On pourra remarquer que $\mathbb{F}_3[X]$ est euclidien donc principal.)

EXERCICE 6. Soient K un corps, et α un élément fixé de K. On note I_α l'idéal de $K[X,Y]$ engendré par le polynôme $X - \alpha Y$

i) Montrer que pour tout $P(X,Y) \in K[X,Y]$, il existe $Q(X,Y) \in K[X,Y]$ et $R(Y) \in K[Y] \subset K[X,Y]$ tels que $P(X,Y) = (X - \alpha Y)Q(X,Y) + R(Y)$.

ii) Soit

$$\Phi : K[X,Y] \longrightarrow K[T]$$

l'homomorphisme défini par $\Phi(c) = c$ pour $c \in K$, $\Phi(X) = \alpha T$ et $\Phi(Y) = T$. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $\ker\Phi = I_\alpha$.

iii) En déduire que $K[X,Y]/I_\alpha \simeq K[T]$ et que I_α est un idéal premier.

iv) Déterminer un idéal maximal de $K[X,Y]$ contenant I_α

EXERCICE 7. Soit K un corps et

$$\Phi : K[X,Y,Z] \longrightarrow K[T]$$

l'homomorphisme défini par:

$$\Phi(c) = c \text{ pour } c \in K,$$

$$\Phi(X) = T,\ \Phi(Y) = T^2,\ \Phi(Z) = T^3.$$

Montrer que $\ker\Phi$ est l'idéal engendré par $Y - X^2$ et $Z - XY$. En déduire que $K[T]$ est isomorphe à $K[X,Y,Z]/(Y - X^2, Z - XY)$. En déduire que l'idéal $(Y - X^2, Z - XY)$ de $K[X,Y,Z]$ est premier mais pas maximal. Déterminer un idéal maximal le contenant.

EXERCICE 8. Soit A un anneau.

i) Montrer que $r(A) \subset \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$.

ii) Soit $a \in A \setminus r(A)$. On note Σ_a l'ensemble des idéaux I de A tels que $\{a^n\}_{n\geq 1} \cap I = \emptyset$. Appliquer le lemme de Zorn pour montrer qu'il existe un idéal J maximal au sens de l'inclusion dans Σ_a.

iii) Montrer que

$$x \notin J \Leftrightarrow \exists n \geq 1, \exists j \in J, \exists b \in A \text{ tels que } j + bx = a^n.$$

En déduire que J est premier.

iii) Conclure que $r(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ premier}} \mathfrak{p}$.