Université de Bordeaux 1. L3 Algèbre 4. Année 2012/2013

feuille 4. Anneaux factoriels.

EXERCICE 1. 1) Rappeler les définitions d'élément irréductible, d'élément premier, d'anneau factoriel.

2) Quel est le lien entre un élément premier et un élément irréductible dans un anneau intègre, dans un anneau factoriel?

3) Donner la définition du *pgcd*. Que peut-on dire du *pgcd* dans un anneau intègre, factoriel, principal, euclidien?

4) Soit A intègre. Soit $p \in A$ non nul, non inversible. Montrer que p est irréductible si et seulement si (p) est maximal parmi les *idéaux propres principaux* de A.

5) Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal. Est-il factoriel?

EXERCICE 2. i) Quels sont les idéaux, les idéaux premiers, les idéaux maximaux de $\mathbb{F}_3[X]/(X^2(X+1))$? de $\mathbb{F}_5[X]/(X^2+1)$?

ii) Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}[X]/(2X^2)$? Est-il aussi simple de les décrire? Donner un idéal premier non maximal de $\mathbb{Z}[X]$ contenant $< 2X^2 >$.

EXERCICE 3. Soit $A = \mathbb{Q}[X,Y]/(XY-1)$.

1) Montrer que A est isomorphe à $\mathbb{Q}[X,X^{-1}]$.

2) Montrer que A est principal. (Indication: soit I un idéal de A. Étudier $I_0 = I \cap \mathbb{Q}[X]$.)

EXERCICE 4. Soit $A = \mathbb{Q}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$. On note s la surjection canonique $\mathbb{Q}[X,Y] \to A$ et on pose $x = s(X)$, $y = s(Y)$.

1) Soit $B = \mathbb{Q}[Y]$. Montrer que X^2+Y^2-1 est irréductible dans $B[X]$. En déduire que A est intègre.

2) Montrer que pour tout élément a de A il existe un unique couple $P(Y), Q(Y) \in B$ tel que $a = P(y) + xQ(y)$.

3) Montrer que A/xA est isomorphe à $\mathbb{Q}[Y]/(Y^2-1)$.

4) Montrer que l'idéal xA n'est pas premier dans A.

5) Montrer que x est un élément irréductible.

6) L'anneau A est-il factoriel?

EXERCICE 5. Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ où $i = \sqrt{-1}$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif unitaire.

2) Pour tout $z = a+bi \in \mathbb{C}$ on pose $N(z) = a^2+b^2$. Montrer que $N(z) = z\bar{z}$. En déduire que $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

3) Déterminer le groupe des unités de $\mathbb{Z}[i]$.

4) Montrer que $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ est un stathme euclidien. (Indication: Soient $a+bi, c+di \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que

$$\frac{a+bi}{c+di} = A + Bi + (\alpha + \beta i),$$

où $A+Bi \in \mathbb{Z}[i]$ et $|\alpha|, |\beta| \leq 1/2$).

5) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est principal.

Soit $\pi = a+bi$ un élément de $\mathbb{Z}[i]$.

6)Montrer que si $N(\pi) = p$, p premier, alors π est irréductible. Donner des exemples.

7)Montrer que si $N(\pi) = p^2$, avec p un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$., alors π est irréductible. Donner des exemples.

8)Montrer que si $N(\pi) = cd$ avec $c, d \geq 2$ et $c = e^2 + f^2$, $d = g^2 + h^2$, $e, f, g, h \in \mathbb{N}$, alors π n'est pas irréductible.

9) Factoriser 2, 5, 6 dans $\mathbb{Z}[i]$.

EXERCICE 6. Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

1) Montrer que 4 et $2 + 2i\sqrt{3}$ n'admettent pas de *pgcd*.

2) Que peut-on dire de A?

EXERCICE 7. Soit $A = K[X,Y,Z]/\langle X(1-YZ)\rangle$. Soient x, y, z les classes de X, Y, Z.

1) Montrer que A n'est pas intègre.

2) Montrer que $x|xy$ et $xy|x$.

3) Montrer que x et xy ne sont pas associés (i.e. il n'existe pas $u \in A^*$ tel que $xy = ux$).