Université de Bordeaux 1. L3 Algèbre 4. Année 2012/2013

feuille 5. Polynômes sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$

EXERCICE 1.

i) Soit $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que si $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, $(p,q) = 1$ est une racine de $f(X)$, alors q divise a_n et p divise a_0.

ii) Montrer que toute racine rationnelle de $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ est un entier.

EXERCICE 2. Trouver les racines rationnelles des polynômes:

1) $X^3 - 6X^2 + 15X - 14$;
2) $6X^4 + 19X^3 - 7X^2 - 26X + 12$;
3) $X^3 - 3X^2 + 3$.

EXERCICE 3. Montrer qu'un polynôme $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 3 est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il n'a pas de racines rationnelles.

EXERCICE 4.

i) Donner tous les polynomes irréductibles sur $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
a) de degré 2;
b) de degré 3.
ii) Montrer que le polynôme $X^4 + X + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[X]$ est irréductible.
iii) En déduire que $X^4 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible.

EXERCICE 5. Soient A un anneau factoriel et $P(X) \in A[X]$ un polynôme primitif non constant. Soit $\pi \in A$ un élément irréductible. Supposons que le coefficient dominant de $P(X)$ n'est pas divisible par π et que $P(X) mod \pi$ est irréductible sur l'anneau quotient $A/(\pi)$. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans l'anneau $A[X]$.

EXERCICE 6. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

1) $X^4 - 8X^2 + 12X^2 - 6X + 2$;
2) $X^5 - 12X^3 + 36X - 12$;
3) $X^4 - X^3 + 2X + 1$. (Indication: poser $Y = X - 1$.)

EXERCICE 7. Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles de degré arbitrairement grand sur $\mathbb{Q}[X]$.

EXERCICE 8. Soit p un nombre premier. Montrer que le polynôme $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ est irréductible.

EXERCICE 9. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles:

1) $X^3 + XY^2 + YZ^3$ dans $k[X,Y,Z]$ où k est un corps.

2) $X^3 + Z^2Y + ZY^2$ dans $k[X,Y,Z]$ où k est un corps.

EXERCICE 10. Montrer que le polynôme $X^4 + 5X^3 + 2X^2 + 9$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. (Indication: réduction modulo 2).

EXERCICE 11. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers deux à deux distincts. On veut montrer que le polynôme $f(X) = (X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_n) - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ (et donc irréductible sur $\mathbb{Q}$). Supposons que $f(X) = g(X)h(X)$, où $g, h \in \mathbb{Z}[X]$.

1) Etudier les valeurs prises par g et h en $a_1, \ldots, a_n$.

2) Montrer que le polynôme $g(X) + h(X)$ possède n racines dans $\mathbb{Z}$.

3) En déduire que $g(X) = -h(X)$.

4) Conclure.