Université de Bordeaux 1. L3 Algèbre 4. Année 2012/2013

feuille 6. Polynômes. Racines. Polynômes symétriques. Discriminant

EXERCICE 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que 1 est une racine triple de $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

EXERCICE 2. Déterminer les valeurs de a pour quelles $(X+1)^2$ divise $X^5 - aX^2 - aX + 1$.

EXERCICE 3. Déterminer le polynôme unitaire $f(X)$ de plus petit degré à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que 2, $1+i$ et $2-i$ sont des racines de $f(X)$.

EXERCICE 4. Décomposer $X^4 + 4$ en produit de polynômes irréductibles
1) Sur $\mathbb{C}$;
2) Sur $\mathbb{R}$;
3) Sur $\mathbb{Q}$.

EXERCICE 5. i) Déterminer les relations que doivent satisfaire $a, b \in \mathbb{C}$ pour qu'ils soient les racines du polynôme $X^2 + aX + b$.

ii) Déterminer les relations que doivent satisfaire a, b et $c \in \mathbb{C}$ pour qu'ils soient les racines du polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c$.

EXERCICE 6. On se place dans $A[X_1, X_2, \dots, X_n]$. On note Σ_i, $1 \leq i \leq n$ les polynômes symétriques élémentaires.

Montrer que les polynômes symétriques homogènes de degré 1 s'écrivent sous la fomre $a\Sigma_1, a \in A$.

Montrer que les polynômes symétriques homogènes de degré 2 s'écrivent sous la fomre $a\Sigma_1^2 + b\Sigma_2, a, b \in A$.

Montrer que les polynômes symétriques homogènes de degré 3 s'écrivent sous la fomre $a\Sigma_1^3 + b\Sigma_2\Sigma_1 + c\Sigma_3, a, b, c \in A$

EXERCICE 7. Exprimer les polynômes suivants à l'aide des polynômes symétriques élémentaires:
1) $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$;
2) $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$;
3) $X_1^2X_2 + X_1X_2^2 + X_1^2X_3 + X_1X_3^2 + X_2^2X_3 + X_2X_3^2$;
4)$X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_1^2X_4^2 + X_2^2X_3^2 + X_2^2X_4^2 + X_3^2X_4^2$;
5) $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(X_i + X_j)^3$.

EXERCICE 8. Trouver la somme des carrés des racines du polynôme X^3+2X-3.

EXERCICE 9. Soient α_1, α_2, α_3 les racines de X^3+bX+c. Déterminer les polynômes dont les racines sont α_1^2, α_2^2 et α_3^2.

EXERCICE 10. Calculer $\frac{\partial S_k}{\partial X_i}$ où S_k sont les fonctions symétriques élémentaires.

EXERCICE 11. Soit $F(X_1,\ldots,X_n)=G(S_1,\ldots,S_n)$ une fonction symétrique. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial X_i}=n\,\frac{\partial G}{\partial S_1}+(n-1)\,S_1\,\frac{\partial G}{\partial S_2}+\cdots+S_{n-1}\,\frac{\partial G}{\partial S_n}$$

EXERCICE 12. Soit $F(X_1,\ldots,X_n)=G(S_1,\ldots,S_n)$ une fonction symétrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

a) $F(X_1+Y,X_2+Y,\ldots,X_n+Y)=F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$;

b) $n\frac{\partial G}{\partial S_1}+(n-1)\,S_1\,\frac{\partial G}{\partial S_2}+\cdots+S_{n-1}\,\frac{\partial G}{\partial S_n}=0$.

EXERCICE 13. Soit $F(X_1,\ldots,X_n)$ un polynôme homogène de degré 2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

a) $F(X_1+Y,X_2+Y,\ldots,X_n+Y)=F(X_1,X_2,\ldots X_n)$.

b) $F=c\sum_{i<j}(X_i-X_j)^2$.

Exercice 14. Montrer que le discriminant du polynôme X^3+pX+q est égal à $-4p^3-27q^2$.

EXERCICE 14. Montrer que les discriminants des polynômes $a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0$ et $a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n$ sont égaux.

EXERCICE 15. Pour quels $\lambda\in\mathbb{C}$ les polynômes $X^3-\lambda X+2$ et $X^2+\lambda X+2$ ont une racine commune dans $\mathbb{C}$? Dans $\mathbb{R}$?