# Composition 1

7 septembre 2015

durée 2h

**Exercice 1.** Soit

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}.$$

1) Montrer que $f$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$.
3) Montrer que $f$ n'est pas dérivable en 0.
*Indication:* On pourra poser $x_N = \frac{\pi}{2^N}$ et estimer $f(x_N)$.

**Exercice 2.** Soit $(u_n)_n \geq 1$ une suite de termes positifs telle que

$$\sum_{n \geq 1} u_n = +\infty.$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $n \geq 1$ et $S_0 = 0$.

On considère $\alpha > 0$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

1) Soit $n \geq 1$. Montrer que

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

Conclure dans le cas $\alpha > 1$.

2) Montrer que

$$\sum_{k=p+1}^{q} \frac{u_k}{S_k} \geq 1 - \frac{S_p}{S_q}.$$

Conclure pour le cas $\alpha = 1$ puis $0 < \alpha < 1$.

**Exercice 3.** Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $v_n := v_n(x)$ la suite définie par $v_0 = x$ et $v_{n+1} = \sin(v_n)$, $n \geq 1$.

1) Montrer que la suite $v_n$ est décroissante et positive. Calculer sa limite.
2) Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quand $n \to +\infty$

$$v_{n+1}^\alpha - v_n^\alpha \sim -\frac{\alpha}{6} v_n^{\alpha+2}.$$

3) En déduire que $v_n^{-2} \sim \frac{n}{3}$.
4) Que peut-on dire de la série $\sum_n v_n$?
5) Montrer que la série $\sum (-1)^n v_n(x)$ converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

**Exercice 4.** Soit $(a_n)$ une suite de nombres complexes admettant une limite $l \in \mathbb{C}$.

1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

2) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.